



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

GENERACIÓN Y DINÁMICA  
DE ELECTRONES RUNAWAY  
EN PLASMAS TOKAMAK

Tesis doctoral presentada por *Isabel Fernández Gómez*  
dentro del programa de *Doctorado en Plasmas y Fusión nuclear*

Dirigida por *Dr. J. Ramón Martín Solís*  
y *Dr. Raúl Sánchez Fernández*

9 de junio de 2013



*A mis padres*



*"En mitad del camino de la vida  
en una selva oscura me encontraba  
después de dar mi senda por perdida.  
¡Ay, cuánto el descubrir es cosa dura  
que esta selva, salvaje, áspera y fuerte  
en el alma renueva mi amargura!  
Amargura y pavor que es casi muerte;  
mas, para hablar del bien allí encontrado,  
diré de lo demás que vi por suerte."*

Dante Alighieri  
*Divina Comedia*



*"Era el mejor de los tiempos, era el peor de los tiempos, la edad de la sabiduría, y también de la locura; la época de las creencias y de la incredulidad; la era de la luz y de las tinieblas; la primavera de la esperanza y el invierno de la desesperación. Todo lo poseíamos, pero no teníamos nada; caminábamos en derechura al cielo y nos extraviábamos por el camino opuesto. En una palabra, aquella época era tan parecida a la actual, que nuestras más notables autoridades insisten en que, tanto en lo que se refiere al bien como al mal sólo es aceptable la comparación en grado superlativo."*

Charles Dickens  
*Historia de dos ciudades*





# Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el esfuerzo conjunto de mucha gente. Unos por participación directa y otros por haber aportado algún elemento clave, como concederme la llave del tiempo para realizarla, aportar consejos o simplemente ánimos para seguir adelante. Muchas son las personas a las que agradecer, demasiadas para citarlas a todas, pero sabed que sin vuestra ayuda finalizar este trabajo no habría sido posible.

En primer lugar quiero agradecer a mis directores de tesis Dr. J. Ramón Martín Solís y Dr. Raúl Sánchez Fernández por su ayuda y paciencia. La dedicación que muestran por la investigación ha sido uno de los elementos mas motivadores para mi durante este tiempo, y todas sus ideas y contribuciones han hecho de esta tesis, una experiencia productiva y estimulante. Debo incluir a Antonio de Castro y a Susana Briz, por proporcionarme el tiempo necesario para que pudiera desarrollar este trabajo. De ellos he aprendido que se puede compaginar el trabajo bien hecho con una buena dosis de humor y amistad. Gracias también a Victor Tribaldos por poner a punto una valiosa herramienta de trabajo como es el cluster y por tomarse el tiempo de explicarnos su funcionamiento con tanta paciencia.

Dentro de mi ámbito de trabajo agradezco a mis compañeros del Departamento de Física de la Universidad Carlos III de Madrid, y en particular a mi grupo de trabajo del Laboratorio de Infrarrojos, por el buen ambiente de trabajo que compartimos, que hace tan llevadero el día a día. En especial quiero mencionar a Samuel, Esteban, Jacobo y a Felipe que han sufrido esta tesis desde el principio y han contribuido en alguna parte a su desarrollo, gracias compañeros.

Mención especial para todos los que recibieron las quejas y las penas durante este tiempo. Para mis amigas Jesh, Marian y la pequeña Lidi, que siempre están al pie del cañón y sienten una perturbación en la fuerza cuando me encuentro de capa caída. A mis compañeras de "Reina Cristina" Ivana, Marta, Rebe y Rosa un claro ejemplo de que en un piso compartido se pueden hacer los mejores amigos. Y para Oscar, para el que el paso de los años o la distancia no suponen una barrera a la amistad.

Quiero agradecerle a mi familia su apoyo incondicional. A mis padres, Isabel y Javier, por educarme en un ambiente de amor al conocimiento y a la cultura que ha allanado el camino a la realización de metas más elevadas. Gracias por estar siempre en los peores momentos dándole una vuelta al problema para que todo siga adelante y se aprenda algo de los errores cometidos. Para vosotros es esta tesis. A Ele, a Nacho y Javi por acompañarme todo el camino. A Cristina, a Toño

y a Mari por intentar comprender lo que hago y tener la paciencia de escuchar. Gracias también a Emi, un ejemplo a seguir como persona, y una rebelde en la ancianidad. Pero sobre todo, quiero agradecerle a Rubén todo el cariño, el apoyo y la paciencia durante estos años, por haber padecido este proceso en primera línea de fuego, y por poner todo de su parte. Han sido tiempos difíciles, pero lo hemos superado todo.

Finalmente, mencionar a los que han hecho más llevadero el trayecto sin ellos saberlo, a K.Cobain, E.Vedder, y C.Moreno por ser, para mí, los representantes de la música que Nietzsche calificó como "*estímulo de la vida*" y con el que estoy totalmente de acuerdo. A J.Snow, Kvothe y J.Wayland porque nunca dejaron que se extinguiera la llama de la imaginación. Muchas gracias.

# Índice general

Agradecimientos	III
Índice general	V
Índice de figuras	VII
Resumen	1
<b>I Conceptos Básicos</b>	<b>5</b>
<b>1. La fusión nuclear. El esquema tokamak</b>	<b>7</b>
1.1. Plasmas y fusión nuclear . . . . .	7
1.2. El esquema Tokamak. El proyecto ITER . . . . .	9
<b>2. Electrones runaway en plasmas tokamak</b>	<b>13</b>
2.1. El fenómeno runaway . . . . .	14
2.2. Cuestiones básicas de física runaway . . . . .	16
2.2.1. Generación de electrones runaway . . . . .	17
2.2.2. Energía límite . . . . .	19
2.3. Electrones runaway y disrupciones . . . . .	21
<b>II Generación y dinámica runaway</b>	<b>23</b>
<b>3. Ecuación de Langevin para electrones runaway</b>	<b>25</b>
3.1. Colisiones de Coulomb . . . . .	26
3.2. Tratamiento cinético. Ecuación de Fokker - Planck . . . . .	31
3.2.1. Función de distribución. Ecuación cinética . . . . .	31
3.2.2. Operador de colisión de Fokker-Planck . . . . .	32
3.2.3. Ecuación de Fokker-Planck para electrones runaway . . . . .	34
3.3. La aproximación de Langevin . . . . .	35
3.3.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas. La ecuación de Langevin	35
3.3.2. Coeficientes de Langevin para colisiones culombianas con el plasma térmico . . . . .	38
3.3.3. La ecuación de Langevin para electrones runaway . . . . .	39
3.3.4. Solución numérica de la ecuación de Langevin . . . . .	41

<b>4. Probabilidad runaway. Condiciones para la generación de electrones runaway</b>	<b>45</b>
4.1. Introducción . . . . .	45
4.2. Probabilidad runaway. Condiciones para la generación de electrones runaway . . . . .	46
<b>5. Función de distribución y Producción runaway</b>	<b>51</b>
5.1. Función de distribución runaway. Temperatura perpendicular . . . .	52
5.2. Producción runaway. Efecto de la dinámica perpendicular . . . . .	57
 <b>III Límites de energía para electrones runaway en plasmas tokamak</b>	 <b>63</b>
<b>6. Modelo de partícula test para electrones runaway</b>	<b>65</b>
6.1. Descripción del modelo . . . . .	66
6.2. Trayectorias del electrón en el espacio de momentos . . . . .	68
6.3. Generación de electrones runaway . . . . .	71
6.3.1. Campo eléctrico crítico . . . . .	71
6.3.2. Momento crítico . . . . .	72
6.4. Energía límite . . . . .	73
<b>7. Radiación de Bremsstrahlung</b>	<b>75</b>
7.1. Ecuaciones del modelo de partícula test . . . . .	76
7.2. Energía Límite . . . . .	78
7.3. Condiciones para pérdidas de energía dominadas por la radiación de <i>bremsstrahlung</i> . . . . .	81
7.3.1. <i>Bremsstrahlung</i> vs movimiento de giro . . . . .	81
7.3.2. <i>Bremsstrahlung</i> vs movimiento del centro guía . . . . .	82
7.3.3. Densidad y campos eléctricos críticos . . . . .	83
7.3.4. Efecto sobre la energía del electrón . . . . .	84
7.4. Electrones runaway durante disrupciones . . . . .	86
 <b>IV Conclusiones</b>	 <b>91</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>103</b>

# Índice de figuras

1.1.	Sección eficaz para diferentes reacciones de fusión . . . . .	8
1.2.	Reacción de fusión Deuterio -Tritio . . . . .	8
1.3.	El esquema Tokamak . . . . .	10
1.4.	Tokamak JET . . . . .	10
1.5.	Criterio de Lawson para distintos tokamak . . . . .	11
1.6.	Tokamak ITER . . . . .	12
2.1.	Daño producido por electrones runaway en un tokamak . . . . .	14
2.2.	Fuerza Colisional . . . . .	15
2.3.	Fuerza de fricción colisional incluyendo efectos relativistas . . . . .	16
2.4.	Generación Dreicer de electrones runaway . . . . .	17
2.5.	Generación en Avanzanla . . . . .	18
2.6.	Disrupción en tokamak JET . . . . .	21
3.1.	Movimiento Browniano: Tinta difundiéndose en un fluido . . . . .	26
3.2.	Colisiones de Coulomb . . . . .	27
3.3.	Electrón en un gas de Lorentz . . . . .	27
3.4.	Cambio en la velocidad de un electrón en una colisión . . . . .	28
3.5.	Simulación para campo nulo y distintos valores de carga efectiva . .	43
4.1.	Probabilidad Runaway . . . . .	47
4.2.	Ajuste de la probabilidad runaway por una función sigmoial . . . .	48
4.3.	Parámetros del plasma para generación runaway . . . . .	49
4.4.	Probabilidad Runaway 2D . . . . .	50
5.1.	Función de distribución en espacio de velocidades . . . . .	52
5.2.	Probabilidad runaway en el espacio de velocidades . . . . .	53
5.3.	Función distribución. Temperatura perpendicular . . . . .	55
5.4.	Aproximación analítica Gurevich . . . . .	56
5.5.	Dinámica perpendicular en $T_{\perp}$ . . . . .	57
5.6.	Tasa de producción runaway . . . . .	57
5.7.	Aproximación a la tasa de producción runaway . . . . .	58
5.8.	Tasa de generación runaway analítica . . . . .	61
5.9.	Ratio de la tasa producción 2D/1D . . . . .	61
5.10.	Tasa de generación runaway 1D y 2D . . . . .	62
6.1.	Espacio de Fases . . . . .	69
6.2.	Campo eléctrico normalizado . . . . .	70
6.3.	Campo eléctrico $D_c$ y momento $q_c$ críticos . . . . .	72
6.4.	Energía límite . . . . .	73

7.1. Campo eléctrico vs. $\gamma_s$ . Radiación <i>bremsstrahlung</i> . . . . .	78
7.2. Caída de la energía por Radiación <i>bremsstrahlung</i> . . . . .	79
7.3. Caída máxima de la energía por Radiación <i>bremsstrahlung</i> . . . . .	79
7.4. Radiación dominante en la energía límite . . . . .	80
7.5. Condiciones de campo eléctrico para <i>bremsstrahlung</i> . . . . .	83
7.6. Densidad crítica para <i>bremsstrahlung</i> . . . . .	84
7.7. Superficie de la caída relativa de energía . . . . .	86
7.8. Campo eléctrico crítico en ITER y JET . . . . .	87
7.9. Energía electrones runaway en ITER y JET . . . . .	88
7.10. Energía límite electrones runaway en ITER y JET . . . . .	89

# Resumen

La dinámica y generación de electrones runaway en plasmas tokamak constituye el tema central de esta tesis. En un tokamak, el fenómeno runaway es el resultado de la existencia de un campo eléctrico en dirección toroidal. Aquellos electrones cuya velocidad excede un cierto valor crítico se aceleran de forma continua, ya que la eficiencia de las colisiones para disipar la energía ganada en el campo disminuye con la velocidad ( $\sim v^{-1}$ ). Se tiene entonces lo que se conoce como un *electrón runaway*. Los electrones runaway son continuamente acelerados por el campo eléctrico y, si su número es suficientemente grande, pueden suponer un serio peligro potencial para el dispositivo en caso de que interactúen con las estructuras del sistema. La situación es especialmente crítica en el caso de una disrupción.

Las disrupciones constituyen uno de los problemas de mayor envergadura al que deberá enfrentarse tanto la operación del proyecto de fusión ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) como la futura planta de fusión nuclear basada en el esquema tokamak. Una disrupción es esencialmente un fenómeno inestable y violento en el que la corriente y la energía del plasma se pierden de forma repentina en unas decenas de milisegundos. Las enormes cargas de calor y las fuerzas de carácter magnético que actúan sobre las estructuras del sistema durante una disrupción suponen un serio peligro para la supervivencia del mismo. Por otro lado, durante una disrupción, se generan campos eléctricos muy intensos que dan lugar a la generación de un número elevado de electrones runaway con energías de hasta cientos de MeV. La interacción de estos electrones energéticos con los materiales de la primera pared constituye un serio peligro para la integridad del sistema. Por ello, prevenir, controlar o, al menos, mitigar los daños asociados a una disrupción y, en particular, a la generación de electrones runaway constituye en la actualidad un objetivo prioritario de la investigación en fusión y del diseño de un dispositivo como ITER.

Con el fin de diseñar sistemas eficaces que permitan controlar el daño asociado a los electrones runaway, resulta esencial comprender los mecanismos que determinan su generación y la energía que pueden alcanzar. Estos dos problemas, la generación y formación de la población runaway, y la máxima energía que los electrones runaway generados pueden alcanzar, constituyen los dos problemas centrales de esta tesis.

La memoria se ha dividido en cuatro partes. En la primera parte, dividida en dos capítulos, se introducen los conceptos básicos relativos al tema de investigación. En el primer capítulo, se realiza una introducción breve a la fusión ter-

monuclear controlada y, en particular, al esquema tokamak, al que se refiere esta tesis. El fenómeno runaway en plasmas tokamak constituye el tema del segundo capítulo, en el que se introducen los aspectos básicos relativos a la física runaway (generación y energía runaway) y el problema de los electrones runaway durante disrupciones.

En la segunda parte, que consta de tres capítulos, se presentan los resultados obtenidos en relación al problema de la generación y formación de la población runaway. El análisis de la dinámica runaway requiere un tratamiento apropiado de las colisiones culombianas de los electrones runaway con los electrones e iones térmicos. En esta tesis, este análisis se basa en el método de Langevin (desarrollado en el Capítulo 3) que incorpora el carácter aleatorio de las colisiones culombianas en una descripción de partícula de los electrones runaway. Este método se usa en el Capítulo 4 para determinar la probabilidad runaway en el espacio de velocidades (es decir, la probabilidad de que un electron se convierta en runaway en función de su velocidad inicial) y para definir criterios simples para la generación de electrones runaway. En el Capítulo 5, la aproximación de Langevin se emplea para calcular y caracterizar la función de distribución runaway en estado estacionario y para realizar estimaciones de la producción Dreicer de electrones runaway (número de electrones runaway generados por unidad de tiempo por difusión en el espacio de velocidades). Uno de los resultados más interesantes de estos capítulos se refiere al efecto sobre los electrones runaway de la dinámica perpendicular al campo magnético. Aunque el fenómeno runaway depende esencialmente de la aceleración de los electrones por el campo eléctrico en dirección paralela al campo, la dispersión colisional de los electrones runaway en dirección perpendicular tiene un efecto determinante sobre la forma de la función de distribución y, con ello, sobre la producción y la población final de electrones runaway. Esencialmente, la dispersión colisional produce un ensanchamiento de la función de distribución runaway en dirección perpendicular lo que lleva a un incremento en el número de electrones en la región runaway y, con ello, de la producción runaway.

La tercera parte está dividida en dos capítulos y aborda el problema de la energía que pueden alcanzar los electrones runaway. Para realizar este estudio, dadas las altas energías que pueden alcanzar, ha sido necesario utilizar una aproximación relativista. Por otro lado, los efectos de difusión colisional asociados las colisiones son pequeños a estas energías, por lo que se ha empleado un modelo simplificado de partícula test en el que se calculan las trayectorias promedio de los electrones runaway en el espacio de momentos. El modelo incluye el efecto sobre la energía del electrón de la aceleración debida al campo eléctrico, las colisiones con las partículas del plasma, así como las pérdidas de energía asociadas a la radiación sincrotrón. El Capítulo 6 revisa las características básicas de este modelo, empleado en trabajos anteriores, y algunos de sus resultados más relevantes. En el Capítulo 7, en el que se presenta la contribución original de esta tesis en este campo, se analiza el efecto de incluir las pérdidas de energía asociadas a la radiación de *bremssstrahlung* emitida por el electrón runaway al ser desviado de su trayectoria como consecuencia de las colisiones con los electrones e iones del plasma. En condiciones normales en un plasma tokamak, la radiación de *bremssstrahlung* debida a los electrones runaway es despreciable en comparación con la



radiación sincrotrón. Sin embargo, en los experimentos de control de interrupciones mediante inyección de impurezas de alta  $Z$  (*MGI: Massive Gas injection*), uno de los métodos principales propuestos para la mitigación de interrupciones en ITER, las condiciones de alta densidad y carga iónica características de los mismos pueden llevar a considerables pérdidas de energía por radiación de *bremsstrahlung*. En este capítulo se demostrará que, efectivamente, en estas condiciones, la radiación de *bremsstrahlung* puede contribuir de forma significativa a las pérdidas de energía de los electrones runaway, reduciendo el valor máximo de la energía que pueden alcanzar. Más aún, el análisis realizado en este capítulo permitirá establecer de forma general las condiciones (densidad,  $Z$  y campo eléctrico) bajo las cuales la radiación de *bremsstrahlung* constituye el mecanismo dominante de pérdidas de energía de los electrones runaway.

Finalmente, en la última parte de la memoria se presentan las conclusiones del trabajo descrito en los capítulos anteriores.

En la medida de lo posible, a lo largo de esta memoria, se ha intentado usar siempre términos castellanos. En los casos en que esto no ha sido posible se ha empleado el término original correspondiente. En este sentido, el uso a lo largo de esta tesis del término aglosajón *runaway* (estándar en la literatura) ha sido preferible a la expresión española correspondiente *fugitivos*, así como el término alemán *bremsstrahlung* en lugar de *frenado*.

En general se han usado unidades del Sistema Internacional. La temperatura  $T$ , sin embargo, siempre que no aparece acompañada de la constante de Boltzmann ( $k$  ó  $k_B$ ), se expresa en unidades de energía, en general, en eV:  $1 \text{ eV} = 1,16 \times 10^4 \text{ K}$ .



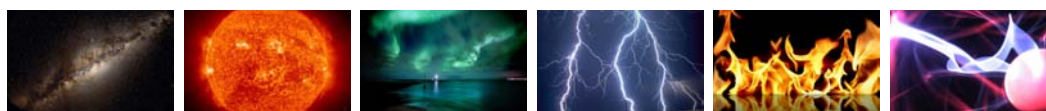
# Parte I

## Conceptos Básicos



# 1

## La fusión nuclear. El esquema tokamak



*Every time you look up at the sky, every one of those points of light is a reminder that fusion power is extractable from hydrogen and other light elements, and it is an everyday reality throughout the Milky Way.*

Carl Sagan

**E**nergía, la llave que mueve el mundo. Su consumo se ha duplicado en las últimas dos décadas y antes de 2030 habrá aumentado un 60 % [1]. En apenas un siglo los combustibles fósiles se agotarán, y no nos conviene seguir liberando gases de efecto invernadero a la atmósfera durante más tiempo. La humanidad se ve obligada a buscar y hacer rentables nuevas formas de energía. Una de las más prometedoras es la energía de fusión, la energía de las estrellas, la misma que produce el Sol y que alimenta la vida que conocemos. Conseguir reproducir este proceso en la Tierra supondría una fuente de energía virtualmente inagotable, sin emisiones de carbono a la atmósfera, ni residuos radiactivos de larga duración.

### 1.1. Plasmas y fusión nuclear

La fusión nuclear es un proceso en el que dos núcleos ligeros reaccionan dando lugar a un núcleo más pesado. La masa perdida se transforma en energía, de acuerdo con la fórmula de la equivalencia masa-energía de Einstein, ( $E = mc^2$ ), y se libera en forma de energía cinética de los productos de la reacción. Este proceso, que se da de forma natural en las estrellas, es casi imposible que se produzca en las condiciones habituales de temperatura y presión en la Tierra, ya que los núcleos tienen que vencer la fuerza eléctrica de repulsión que ejercen entre sí. Para inducir un proceso de fusión, se deben dotar a los núcleos de energía cinética suficientemente elevada como para vencer la energía de repulsión eléctrica y que se acerquen lo suficiente para que tenga lugar el proceso. Por este motivo, las reacciones de fusión son más fáciles de conseguir cuanto menor sea la carga

de los núcleos que reaccionan, ya que la barrera repulsiva será más pequeña y se requerirán tiempos menores. En consecuencia, se recurre al hidrógeno y a sus isótopos (deuterio y tritio), cuyas reacciones alcanzan su máxima eficiencia a una temperatura (energía) menor. En la figura 1.1 se muestran las secciones eficaces de diferentes reacciones de fusión como función de la energía cinética que tienen los núcleos antes de la reacción. Se puede apreciar que la reacción D-T es, la más fácil de conseguir, sobre todo a bajas energías.

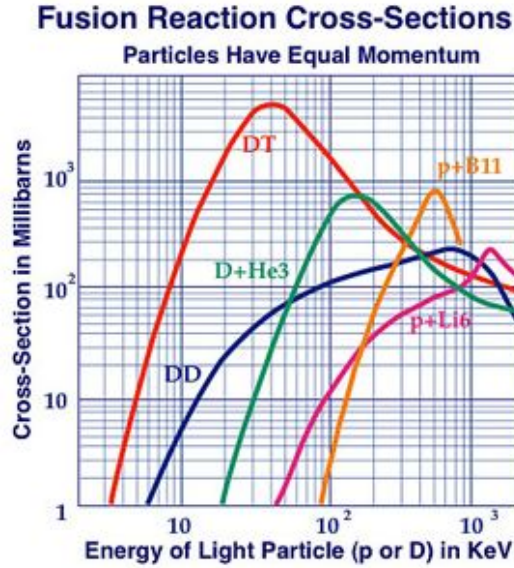


Figura 1.1: Sección eficaz  $\sigma$  para diferentes reacciones de fusión, en función de la energía cinética inicial de los núcleos. La reacción más fácil de conseguir es la de deuterio - tritio.

Por lo tanto, la reacción más favorable energéticamente es la que tiene lugar entre los núcleos de deuterio y tritio (Fig.1.2), en la que se produce una partícula alfa ( ${}^4_2\text{He}$ ) y un neutrón de alta energía:

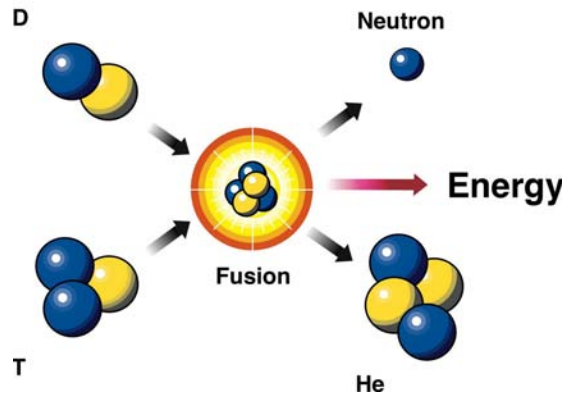
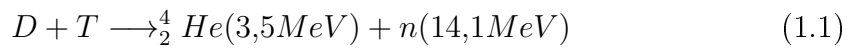


Figura 1.2: Esquema de la reacción de fusión Deuterio -Tritio

El método que se emplea más frecuentemente para conseguir que los núcleos de hidrógeno venzan la barrera de repulsión coulombiana y tengan lugar las reacciones

de fusión, consiste en calentar el combustible a temperatura de máxima eficiencia ( $\sim 100 - 200$  mill.  $^{\circ}\text{C}$ ), lo que se conoce como *fusión termonuclear controlada*. A estas temperaturas, los átomos están completamente ionizados y se dice entonces que el gas se encuentra en estado de *plasma*.

La fusión nuclear constituye una fuente prometedora de energía. Las reservas energéticas son prácticamente inagotables (el deuterio se puede obtener a partir del agua del mar y el tritio a partir del litio, abundante en la corteza terrestre y el agua de mar) y, como productos de la reacción, no se producen residuos radiactivos de larga vida ni emisiones de carbono a la atmósfera, aunque el reactor que contiene el plasma sí se activa por colisiones con los neutrones de alta energía, y debe ser tratado con cuidado. No obstante, su eficiencia energética es enorme: 0.14 toneladas de deuterio producirían aproximadamente la misma cantidad de energía que  $10^6$  toneladas de petróleo. Todo ello en conjunto justifica los esfuerzos realizados actualmente en la investigación en fusión nuclear como fuente de energía para el futuro.

## 1.2. El esquema Tokamak. El proyecto ITER

Para conseguir energía de fusión de forma eficiente, es necesario mantener el combustible (plasma de hidrógeno) confinado durante un tiempo suficiente (*tiempo de confinamiento*), a la temperatura necesaria para vencer la repulsión coulombiana entre los núcleos, y con una densidad suficiente para que reaccionen con la frecuencia necesaria. Las condiciones requeridas de temperatura ( $T$ ), densidad ( $n$ ) y tiempo de confinamiento ( $\tau$ ) en un reactor de fusión se suelen expresar en forma de un valor mínimo del *producto triple de fusión*,  $nT\tau$ , necesario para que la energía producida en las reacciones de fusión compense las pérdidas de energía del sistema (*Criterio de Lawson*). Más específicamente, en un reactor de fusión el plasma deberá encontrarse en estado de *ignición*, lo que significa que la energía de los núcleos de helio liberados en las reacciones  $DT$  basta para mantener el plasma caliente y ser capaz de sustentar el proceso. La condición de ignición se suele expresar en la forma:

$$nT\tau \geq 5 \times 10^{21} \text{m}^{-3} \text{keVs} \quad (1.2)$$

En las estrellas, el plasma se mantiene confinado debido a su propia fuerza gravitacional, lo que le permite alcanzar tiempos  $\tau > 10^9$  años. Para reproducir las condiciones de fusión en la Tierra existen dos opciones principales en vías de desarrollo: la fusión por *Confinamiento inercial* y la fusión por *Confinamiento magnético*. En el caso de la fusión por confinamiento magnético, a la que esta memoria se refiere, se aprovecha el hecho de que el plasma es un gas ionizado para mantenerlo confinado mediante intensos campos magnéticos, que actúan sobre las partículas cargadas del plasma, obligándolas a seguir las líneas de campo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>En el caso de la fusión por confinamiento magnético, los valores típicos de temperatura, densidad y tiempo de confinamiento en estado de ignición son:  $T \sim 10 - 20 \text{keV}$  (100 - 200 millones  $^{\circ}\text{C}$ ),  $n \sim (1 - 2) \times 10^{20} \text{m}^{-3}$ ,  $\tau \sim (1 - 2) \text{s}$ .

Los resultados más prometedores en el campo de la fusión nuclear por confinamiento magnético se han obtenido mediante el esquema *Tokamak*. El tokamak es un dispositivo de forma toroidal en el que el plasma es confinado mediante un *campo magnético toroidal*, creado por las bobinas magnéticas que rodean la cámara de vacío, y un *campo magnético poloidal* generado por una corriente eléctrica en dirección toroidal inducida en el plasma mediante efecto transformador (Fig.1.3). Otro área activa de investigación en el campo de la fusión por confinamiento magnético son los *Stellarators*, dispositivos toroidales en los que tanto el campo magnético toroidal como el poloidal son creados mediante bobinas externas a la cámara de vacío.

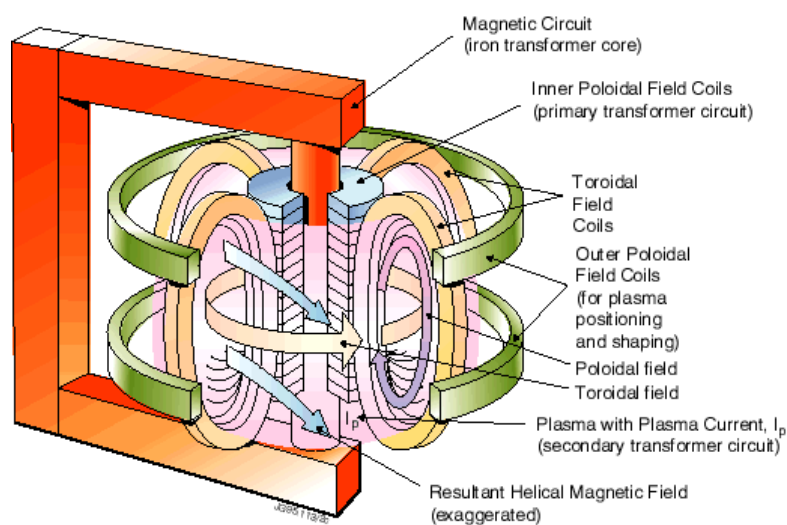


Figura 1.3: Configuración magnética toroidal. El esquema tokamak.

El tokamak JET (Joint European Torus, Reino Unido) [2] de la Comunidad Europea (Fig.1.4) es el mayor tokamak existente en la actualidad y en el que mejores resultados se han obtenido hasta la fecha.

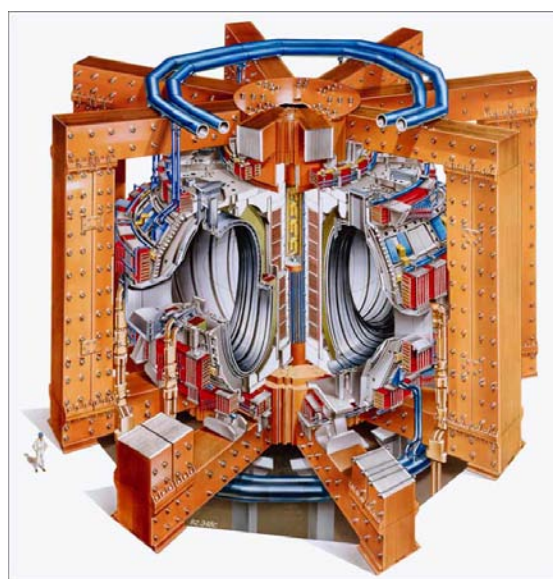


Figura 1.4: El tokamak JET



Sus parámetros básicos de diseño son:

- Radio mayor del plasma:  $R_0 = 2,96$  m.
- Radio menor del plasma:  $a = 1,25$  m.
- Volumen del plasma:  $840 \text{ m}^{-3}$ .
- Corriente del plasma: 3,2 MA (plasma circular) y 4,8 MA (plasma en D).
- Campo toroidal (en el eje): hasta 3,45 T.
- Potencia adicional: hasta 25 MW.

Este dispositivo, ha conseguido alcanzar valores record en el criterio de Lawson en plasmas D-T (Fig.1.5) y, en gran medida, basándose en los resultados obtenidos en el tokamak JET, se ha realizado el diseño del tokamak ITER (*International Experimental Thermonuclear Reactor*) [3].

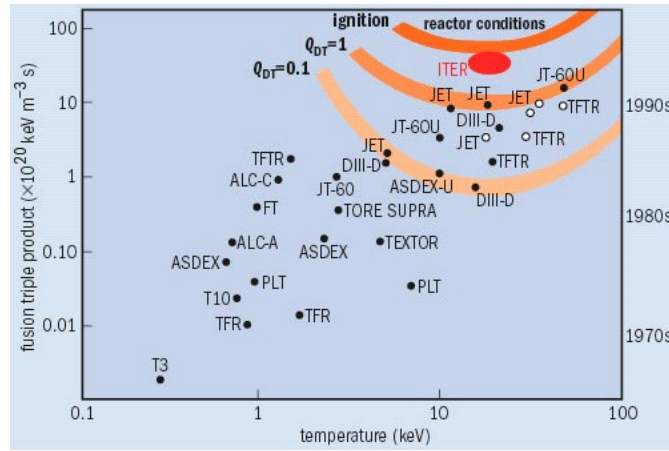


Figura 1.5: *Criterio de Lawson en función de la temperatura para distintos dispositivos tokamak, entre ellos JET e ITER.*

Este proyecto internacional en el que participan la Unión Europea, Japón, China, Rusia, Estados Unidos, Corea del Sur y la India, actualmente en construcción (Fig.1.6), supone la antesala de una posible planta que genere energía para consumo comercial utilizando energía de fusión. Los parámetros de diseño del tokamak ITER han sido establecidos basándose en los resultados obtenidos de los experimentos tokamak, así como en las restricciones tecnológicas actuales. Estos parámetros generales son:

- Radio mayor del plasma:  $R_0 = 6,2$  m.
- Radio menor del plasma:  $a = 2,0$  m.
- Volumen del plasma:  $840 \text{ m}^{-3}$ .
- Corriente del plasma: 15 MA
- Campo toroidal (en el eje): hasta 5,3 T.
- Potencia adicional: hasta  $\sim 400$  MW.
- Amplificación de la potencia  $Q \geq 10$

El objetivo principal de ITER será demostrar que es posible alcanzar un balance positivo de energía en un dispositivo tokamak. Más específicamente, como objetivos del proyecto ITER, se pueden citar:

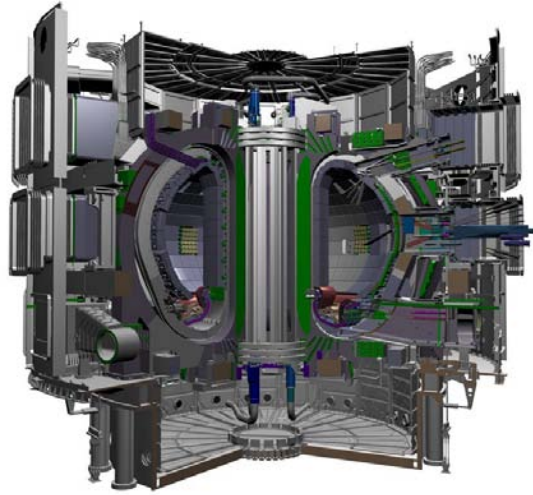


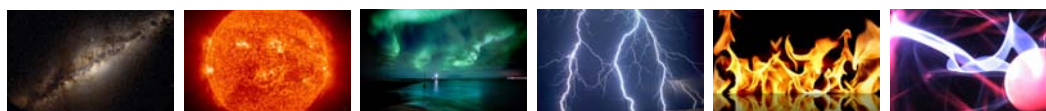
Figura 1.6: *El tokamak ITER*

- Obtener plasmas inductivos (mediante efecto transformador) con un factor de amplificación de potencia  $Q \geq 10$  ( $Q = \text{Potencia de Fusión} / \text{Potencia perdida del sistema}$ ).
- Demostrar operación en estado estacionario con  $Q \geq 5$ .
- Alcanzar el estado de ignición.
- Integrar las tecnologías esenciales para un reactor de fusión (bobinas superconductoras, mantenimiento remoto...)
- realizar tests de los componentes de un futuro reactor.

El proyecto ITER, en el que se intentará demostrar la viabilidad científica y tecnológica de la fusión por confinamiento magnético, puede constituir un gran paso para el futuro de la fusión nuclear como fuente alternativa de energía.

# 2

## Electrones runaway en plasmas tokamak



*Rise up fallen fighters  
Rise and take your stance again  
Because he who fight and run away  
Live to fight another day.*

Bob Marley

El confinamiento del plasma en un tokamak es posible gracias a la existencia de un *campo magnético toroidal*, generado por bobinas externas, y a un *campo magnético poloidal*, producido por una corriente que fluye a través del plasma, generada por un campo eléctrico inducido en dirección toroidal. La presencia de este campo eléctrico es lo que hace posible la existencia de *electrones runaway*. Para electrones con suficiente energía, por encima de un cierto valor crítico, la fuerza de fricción debido a las colisiones con las partículas del plasma no compensa la fuerza eléctrica inducida externamente, ya que la fuerza colisional decrece con la energía. Estos electrones son acelerados de forma continua, pudiendo alcanzar energías de decenas o cientos de MeV [4]. Son los denominados *electrones runaway* o *electrones fugitivos*, también observados en plasmas astrofísicos o en descargas eléctricas durante las tormentas. En el caso de plasmas de fusión, su estudio es de gran interés debido a los posibles daños que estos electrones de alta energía podrían causar, en caso de que interaccionen con las paredes y el divertor del dispositivo [5].

Los electrones runaway fueron detectados por primera vez en un dispositivo toroidal denominado *betatrón* [6], en el que se observó que la mayor parte de los electrones del plasma eran acelerados de forma casi instantánea por el gran campo eléctrico aplicado. En los primeros tokamaks, los electrones runaway fueron principalmente observados durante la fase inicial de la descarga (fase de aumento de la corriente o *current ramp-up*) debido al alto campo eléctrico y la baja densidad del plasma durante esta fase de la descarga.

En la actualidad, el mayor interés en el fenómeno runaway en plasmas tokamak se refiere al control de la generación de electrones runaway durante una disrupción [7]. Una disrupción es un fenómeno inestable muy violento en el que la corriente y la energía del plasma se pierden de forma repentina en tiempos característicos de decenas de milisegundos. Durante una disrupción se generan campos eléctricos muy intensos que pueden dar lugar a la producción de un gran número de electrones runaway que alcanzan energías de hasta cientos de MeVs. La interacción de estos electrones de alta energía con la primera pared del dispositivo constituye un serio peligro para la integridad del sistema (ver Fig.2.1). Comprender y controlar la generación y la energía de los electrones runaway durante una disrupción constituye de este modo un objetivo prioritario de la investigación en fusión y del diseño de un futuro reactor tokamak.



Figura 2.1: Daño producido por electrones runaway al interaccionar con el material de la primera pared del dispositivo tokamak

## 2.1. El fenómeno runaway

Un electrón en un plasma tokamak está sujeto a la acción de dos fuerzas: una fuerza de aceleración debida al campo eléctrico toroidal,  $F_e = eE$ , y una fuerza de fricción,  $F_c$ , debida a las colisiones con las partículas (electrones e iones) del plasma. La fuerza de fricción colisional para electrones no relativistas decrece a altas energías con el inverso del cuadrado de la velocidad ( $\sim v^{-2}$ ), por lo que, por encima de cierta velocidad crítica  $v_c$ , en la que la fuerza colisional y la fuerza eléctrica son iguales, el electrón es continuamente acelerado (Fig.2.2). Estos electrones con una velocidad superior a la velocidad,  $v_c$ , que se aceleran de forma continua bajo la acción del campo eléctrico, reciben el nombre de *electrones fugitivos* o *electrones runaway* [4].

Para velocidades pequeñas, la fuerza de fricción aumenta linealmente con la energía del electrón (Fig.2.3), alcanzando un máximo alrededor de la energía térmica ( $\sim T_e$ ). A medida que la energía aumenta, la fuerza de fricción disminuye.

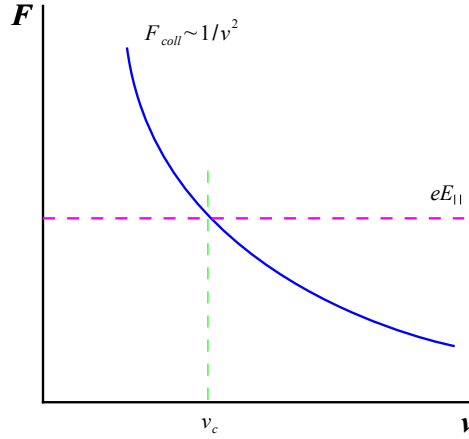


Figura 2.2: Fuerza de fricción colisional (línea continua azul) y fuerza debida al campo eléctrico (línea discontinua roja) en función de la velocidad (energía) del electrón. Se indica también la velocidad crítica para la de generación de electrones runaway

Para electrones con energía mucho mayor que los electrones térmicos, la frecuencia de colisión coulombiana se puede escribir aproximadamente como

$$\nu = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v^3} \quad (2.1)$$

donde  $v$  es la velocidad del electrón,  $m_e$  su masa,  $e$  su carga,  $n_e$  la densidad electrónica,  $\epsilon_0$  la permitividad del vacío y  $\ln \Lambda$  el logaritmo de Coulomb. La velocidad crítica,  $v_c$ , se puede obtener entonces igualando la fuerza eléctrica con la fuerza colisional,  $m_e v \nu = eE$ , lo que lleva a,

$$v_c^2 = \frac{n_e e^3 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e E} \quad (2.2)$$

Electrones con una velocidad mayor que la velocidad crítica,  $v > v_c$ , son continuamente acelerados por el campo eléctrico convirtiéndose, de este modo, en *electrones runaway*. No obstante, como se verá más adelante, su energía no aumenta sin límite debido a efectos relativistas y a pérdidas por radiación.

Otro parámetro de interés para caracterizar el fenómeno runaway es el *campo Dreicer*,  $E_D$ , definido como el campo eléctrico mínimo necesario para que los electrones térmicos, de velocidad  $v_{Te} = (T_e/m_e)^{1/2}$  ( $T_e$  es la temperatura electrónica), se conviertan en electrones runaway,

$$v_c^2 = v_{Te}^2 = \frac{T_e}{m_e} \quad (2.3)$$

que, utilizando la expresión (2.2) para la velocidad crítica,  $v_c$ , conduce a

$$E_D = \frac{n_e e^3 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 T_e} \quad (2.4)$$

La magnitud del campo Dreicer,  $E_D$ , es generalmente, incluso durante disrupciones, mucho mayor que el valor del campo eléctrico en el plasma.

Si la energía de los electrones runaway es suficientemente grande, los efectos relativistas pueden ser importantes [8]. Este efecto se puede apreciar en Fig. 2.3 que muestra que, para energías suficientemente grandes, del orden de la energía en reposo del electrón,  $m_e c^2$ , la fuerza de fricción colisional deja de disminuir con la energía.

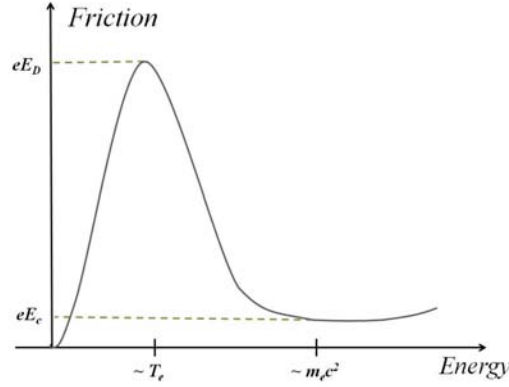


Figura 2.3: Fuerza de fricción colisional como función de la energía del electrón, incluyendo efectos relativistas para altas energías ( $> m_e c^2$ ).

Una de las consecuencias más importantes es que, relativísticamente, por debajo de cierto **campo eléctrico crítico**, ( $E_c$ ), no es posible generar electrones runaway. El valor del campo crítico,  $E_c$ , se puede estimar de forma sencilla teniendo en cuenta que para este campo eléctrico la velocidad crítica toma su valor máximo,  $v_c = c$ , con lo cual, usando la relación (2.2),

$$c^2 = \frac{n_e e^3 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e E_c} \implies E_c = \frac{n_e e^3 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e c^2} \quad (2.5)$$

y, en función del campo Dreicer,

$$\frac{E_c}{E_D} = \frac{T_e}{m_e c^2} \quad (2.6)$$

lo que indica que, en general, el campo crítico es mucho menor que el campo Dreicer, ya que,  $T_e \gg m_e c^2$ . Normalmente, el campo eléctrico inducido durante una disrupción es mucho mayor que el campo crítico,  $E \gg E_c$ , lo que lleva a la generación de un gran número de electrones runaway. Por el contrario, en la fase estacionaria de una descarga tokamak, si el tamaño del dispositivo y la densidad del plasma son suficientemente grandes, el campo eléctrico será menor o del orden del campo crítico, por lo que no suelen aparecer gran número de electrones runaway en un experimento tokamak a menos que tenga lugar una disrupción.

## 2.2. Cuestiones básicas de física runaway

El estudio de los electrones runaway dentro del campo de la fusión nuclear por confinamiento magnético (y, en particular, dentro del esquema tokamak) es de gran interés, especialmente por lo que se refiere a los posibles daños que estos electrones

de alta energía pueden ocasionar si interaccionan con las estructuras del sistema. Entre las principales áreas actuales de investigación dentro de la física runaway cabe destacar:

- Los mecanismos de generación de los electrones runaway.
- Análisis de la energía máxima que pueden alcanzar los electrones runaway y métodos para controlarla.
- La difusión o transporte radial de electrones runaway.

### 2.2.1. Generación de electrones runaway

Una de las áreas más importantes de investigación relativa a los electrones runaway es la que se refiere al estudio de los mecanismos de generación, ya que, los daños que estas partículas pueden producir dependen en gran medida de su número. Los mecanismos básicos mediante los que se pueden generar electrones runaway son:

- Generación primaria o generación Dreicer [9]
- Generación secundaria o mecanismo de avalancha [10]

#### Generación Dreicer

En el caso del mecanismo Dreicer (Ec.(2.7), Fig.2.4), los electrones runaway se generan por difusión en el espacio de velocidades a la velocidad o energía crítica.

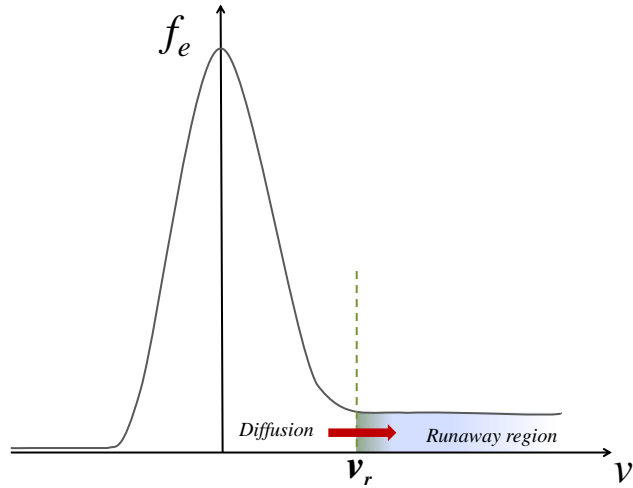


Figura 2.4: Generación de electrones runaway considerando el número de electrones que superan la velocidad crítica  $v_r$  (flecha roja).

Resolviendo la ecuación cinética de Fokker-Planck, se puede determinar el número de electrones runaway que se producen mediante este proceso [11], lo que ha llevado a fórmulas analíticas que permiten calcular de forma simple la generación Dreicer de electrones runaway:

$$\frac{dn_r}{dt} = n_e \nu_e \lambda \quad (2.7)$$

donde  $n_r$  es la densidad de electrones runaway,  $n_e$  la densidad electrónica del plasma,  $\nu$  la frecuencia de colisión para electrones relativistas ( $\nu_e = n_e e^4 \ln \Lambda / 4\pi m_e^2 c^3$ ) y  $\lambda \equiv (dn_r/dt)/n_e \nu_e$  es la evolución de la tasa de generación runaway, siendo  $dn_r/dt$  la tasa de producción. Como se verá en el capítulo 5, se puede hacer una aproximación de  $\lambda$  basándose en la solución del estado estacionario de la ecuación de Fokker-Planck [12],

$$\lambda = K(Z_{eff}) \epsilon^{-3(1+Z_{eff})/16} \exp\left(-\frac{1}{4\epsilon} - \sqrt{\frac{1+Z_{eff}}{\epsilon}}\right) \quad (2.8)$$

con los valores de  $K(Z_{eff})$  se toman de Ref. [12],  $\epsilon = E_{||}/E_D$ , donde  $E_{||}$  es el campo eléctrico y  $E_D$  es el campo Dreicer antes definido;  $Z_{eff}$  es la (*carga iónica efectiva del plasma*), definida como

$$Z_{eff} = \sum \frac{n_j Z_j^2}{n_e} \quad (2.9)$$

donde la suma se extiende a todas las especies iónicas  $j$  del plasma, siendo  $n_j$  su densidad y  $Z_j$  su carga.

### Mecanismo de avalancha

El mecanismo secundario o de avalancha se basa en el hecho de que la colisión de electrones runaway con electrones térmicos del plasma puede dar lugar a nuevos electrones runaway [10] las colisiones de corto alcance de electrones runaway con electrones térmicos puede producir un crecimiento exponencial de la población runaway.

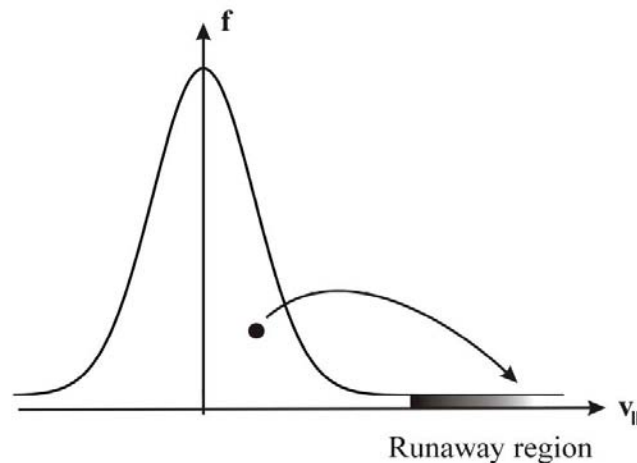


Figura 2.5: Generación de electrones runaway en avalancha por colisión de electrones runaway con electrones térmicos

La generación secundaria de electrones runaway se puede estimar de manera simple como



$$\frac{dn_r}{dt} = \frac{n_r}{\tau_s} \quad (2.10)$$

donde  $\tau_s$  es el denominado *tiempo de avalancha*, que puede aproximarse como [13]

$$\tau_s = \frac{4\pi\epsilon_0^2 c^3}{e^4 n_e} \sqrt{\frac{3(5 + Z_{eff})}{\pi}} \left( \frac{E_{||}}{E_c} - 1 \right)^{-1} \quad (2.11)$$

$E_c$  es el campo eléctrico mínimo necesario para generar runaways [8], dado por la expresión 2.5.

La importancia del mecanismo de generación secundaria durante disrupciones aumenta con la corriente del plasma, ya que, en este caso, el valor del campo eléctrico durante la disrupción es mayor, y se cree que puede desempeñar un papel fundamental en la generación de electrones runaway durante disrupciones en futuro reactor de fusión [14].

### 2.2.2. Energía límite

Otro de los problemas fundamentales relativos a los electrones runaway es el que se refiere a la máxima energía que pueden alcanzar y al desarrollo de sistemas que puedan ayudar a limitarla, ya que, durante una disrupción un electrón runaway puede alcanzar energías muy elevadas, de decenas de MeV, y el daño que pueden producir a las estructuras de la máquina está directamente relacionado con la energía máxima que pueden alcanzar. Al margen de las pérdidas de energía debido a las colisiones con las partículas del plasma, esta energía puede ser limitada por varios efectos, entre los que podemos destacar:

- **Radiación sincrotrón:** Una partícula cargada en un tokamak sigue una trayectoria curva, emitiendo radiación electromagnética. Se denomina radiación sincrotrón cuando se trata de electrones relativistas moviéndose en el campo magnético. Existen dos contribuciones principales a este tipo de radiación: una asociada al movimiento del centro guía de la partícula (esencialmente, movimiento toroidal), y otra asociada al movimiento de giro de la partícula alrededor de la línea de campo magnético en su órbita de Larmor.

Este tipo de pérdidas por radiación es de gran importancia para partículas energéticas como los electrones runaway, ya que, la radiación sincrotrón aumenta con la cuarta potencia de la energía [15],

$$P_S = \frac{2}{3} r_e m_e c^3 \left( \frac{v}{c} \right)^3 \gamma^4 \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle, \quad (2.12)$$

donde  $P_S$  es la potencia perdida debido a la radiación sincrotrón,  $r_e$  es el radio clásico del electrón,  $m_e$  su masa,  $v$  su velocidad y  $\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle$  es el radio de curvatura promediado sobre el movimiento de giro del electrón alrededor de la línea de campo.

- **Pérdidas radiales (o difusión radial) de los electrones runaway:** Los electrones escapan radialmente del dispositivo antes de que puedan aumentar

más su energía [16]. En la actualidad, existe un consenso bastante generalizado de que las pérdidas de calor y de partículas en un dispositivo de fusión por confinamiento magnético (lo que se conoce en general como procesos de *transporte*) se deben a fluctuaciones de campos eléctricos y magnéticos en el plasma (turbulencia eléctrica y magnética).

Las partículas de alta energía, como es el caso de los electrones runaway, son esencialmente no colisionales debido a que la frecuencia de las colisiones coulombianas disminuye con la energía de la partícula. De esta manera, la turbulencia en el plasma afecta de forma significativa a la dinámica de estos electrones. En concreto, dado que una partícula cargada sigue básicamente las líneas de campo magnético, los electrones runaway son particularmente sensibles a las fluctuaciones magnéticas. Así, estudiando la difusión radial de electrones runaway, se puede obtener información importante sobre las perturbaciones magnéticas y sobre el papel que éstas pueden desempeñar en el transporte observado en un plasma tokamak o stellarator<sup>1</sup>.

Por otro lado, la difusión radial asociada a fluctuaciones magnéticas creadas mediante corrientes en bobinas externas constituye uno de los métodos propuestos en la actualidad para el control de los electrones runaway durante disrupciones [16].

- **Deriva de la órbita runaway:** Cuando la energía de los electrones runaway aumenta, su órbita experimenta una deriva radial hacia fuera con lo cual, si el desplazamiento es suficientemente grande, puede llegar a chocar con el limitador o la primera pared del dispositivo antes de alcanzar su energía máxima. Una estimación simple de la máxima energía que puede alcanzar el electrón runaway debido a este efecto, suponiendo un perfil plano de corriente, es [12]:

$$\gamma = \left[ \left( 2R_0 \left( 1 - \frac{r_c}{r_l} \right) \frac{I_p}{17000r_l} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}, \quad (2.13)$$

( $r_c$  es el radio menor inicial del centro de la órbita runaway,  $r_l$  el radio del limitador,  $I_p$  es la corriente del plasma y  $R_0$  el radio mayor del tokamak).

El efecto de la radiación *bremsstrahlung* (emitida al colisionar con impurezas y otros iones) sobre la energía del electrón puede desempeñar también un papel importante en condiciones de alta densidad y alta  $Z_{eff}$ , como las que se encuentran actualmente en experimentos dedicados al control de disrupciones mediante inyección masiva de gases nobles de alta  $Z$  [18, 19], y será estudiado en detalle en el Cap.7 de esta memoria.

---

<sup>1</sup>En los experimentos realizados hasta la fecha, los valores medidos del coeficiente de difusión radial de electrones runaway varían entre  $\sim 0,05 - 10 \text{ m/s}^2$  y los niveles de turbulencia magnética estimados a partir de estas medidas son del orden de  $\tilde{B}_r/B_0 \sim 10^{-5} - 10^{-2}$  ( $\tilde{B}_r$  indica las fluctuaciones magnéticas en dirección radial, y  $B_0$  el campo magnético toroidal) [17].

### 2.3. Electrones runaway y disrupciones

La Fig.2.6 muestra un ejemplo de una disrupción en el tokamak JET. Las causas de una disrupción son diversas pero en todos los casos dan lugar a una violenta inestabilidad magnetohidrodinámica que lleva a una pérdida súbita del confinamiento y, con ello, a un rápido enfriamiento del plasma ( $\sim 0,1 - 1$  ms). Esta es la denominada fase de *thermal quench* de la disrupción (gráfica central en Fig.2.6) en la que la temperatura del plasma cae bruscamente a valores de unos pocos eVs. Durante este período, se produce asimismo una redistribución de la corriente que, generalmente, aplanan el perfil y da lugar a un aumento de la corriente (una especie de *joroba* como se puede ver en la gráfica superior de la figura, que suele ser del orden de  $\sim 15\%$  de la corriente total), y a un pequeño pico negativo en el voltaje por vuelta del plasma,  $V_l$  (gráfica inferior). Como consecuencia de la disminución de la temperatura, la resistividad del plasma ( $\eta \propto T_e^{-3/2}$ ) y el campo eléctrico ( $E_{||} = \eta j$ ) aumentan bruscamente (gráfica inferior de Fig.2.6,  $E_{||} \sim V_l/2\pi R_0$ ;  $R_0$  es el radio mayor del plasma). A continuación, la corriente empieza a caer resistivamente (fase de caída de la corriente o *current quench*; gráfica superior) y el alto campo eléctrico inducido por el enfriamiento del plasma da lugar a la generación de un número elevado de electrones runaway que pueden alcanzar energías de decenas o cientos de MeVs.

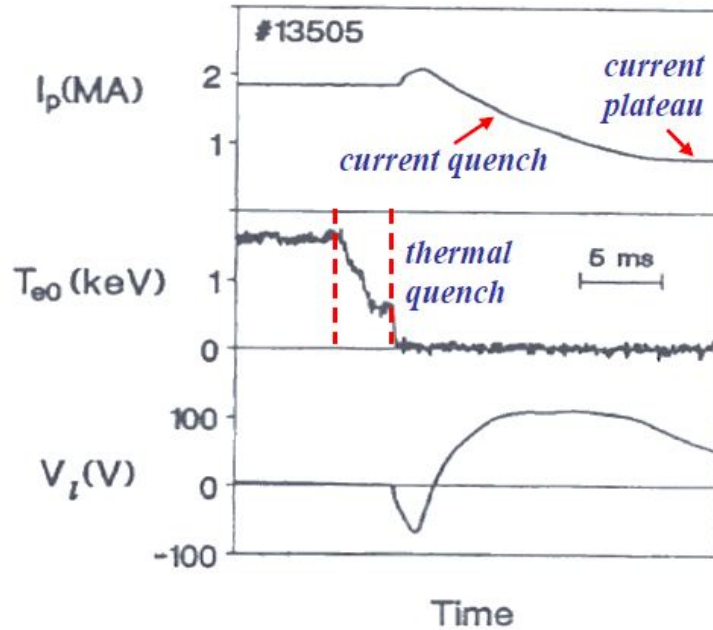


Figura 2.6: Evolución de la corriente, la temperatura en el centro del plasma y el voltaje por vuelta durante una disrupción en el tokamak JET.

Al final de la fase caída de la corriente, toda la corriente es llevada por los electrones runaway que, al ser esencialmente no colisionales debido a su gran energía, no decae más resistivamente y constituye el llamado *plateau* de corriente runaway ( $\sim 1$  MA en la figura).

Debido a su gran energía, la interacción de los electrones runaway generados durante una disrupción con los materiales de la primera pared constituye un serio peligro para la integridad del sistema. Por ello, comprender la generación y dinámica de electrones runaway durante una disrupción, y desarrollar sistemas que puedan contribuir al control del número y la energía de estos electrones constituye un objetivo prioritario de la investigación en fusión y del diseño de un futuro reactor. Así, en los últimos años se han realizado un gran número de trabajos teóricos y experimentales sobre electrones runaway durante disrupciones, entre los que podemos citar:

- a) Predicciones sobre la corriente y energía de electrones runaway durante disrupciones, incluyendo predicciones para futuros dispositivos de fusión como el proyecto ITER [20, 21].
- b) Estudios sobre la eficiencia del *rizado* del campo magnético [16, 22] y de las fluctuaciones magnéticas [23–26] para el control de los electrones runaway durante disrupciones.
- c) Desarrollo de sistemas de control de la producción runaway durante disrupciones basados en inducir fluctuaciones magnéticas en el plasma mediante corrientes externas [27–29], dando lugar a una rápida difusión radial y pérdida de los electrones runaway.
- d) Experimentos de mitigación y control de disrupciones basados la inyección masiva de gases (hidrógeno, gases nobles, etc) [18, 19] o de *pellets* (pequeñas pastillas congeladas de diversos materiales como hidrógeno, argón, neón, etc) en el plasma [30, 31].

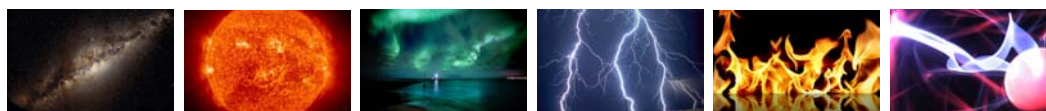
## Parte II

### Generación y dinámica runaway



# 3

## Ecuación de Langevin para electrones runaway



*Chaos umpire sits, and by decision more embroils the fray.  
By witch he reigns: next him, high arbiter, chance governs all.*  
John Milton, *Paradise Lost*

Cuando dentro de un vaso de agua se vierten unas gotas de tinta, se puede observar que las partículas que forman la tinta, en contacto con el líquido, se distribuyen de forma irregular y en cualquier dirección (Fig.3.1). Observando durante un intervalo de tiempo suficiente las partículas de tinta se distribuyen de forma uniforme en el agua, alcanzando un estado de equilibrio. Estas pequeñas partículas de tinta se hallan inmersas en un fluido, el agua, y el movimiento que describen se caracteriza por ser un movimiento continuo e irregular. resultado de la múltiples colisiones microscópicas que experimentan las partículas de la tinta con partículas del medio. La dinámica microscópica es tan complicada, que macroscópicamente da la sensación de que el movimiento de las partículas es impredecible, o *aleatorio*. De hecho, los modelos que se utilizan para describirlo asumen dicha aleatoriedad y se conocen como *Procesos estocásticos*. El movimiento de estas partículas de tinta es un ejemplo de los mismos, que se conoce como *Movimiento Browniano*, y es un proceso de carácter *irreversible*.

Asociado a estos fenómenos de naturaleza aleatoria e irreversible va siempre ligado un tiempo característico. Este tiempo es el que tarda el sistema en lograr el estado de equilibrio, y recibe el nombre de *tiempo de relajación*.

Una de las primeras descripciones macroscópicas del movimiento browniano fue realizada por Paul Langevin en 1908 [32]. Consideró que, si se introduce en un fluido una partícula, esta partícula experimentará, además de un fuerza de viscosidad que se opone al movimiento de la partícula, una fuerza aleatoria debido a



Figura 3.1: *Tinta difundiéndose en un fluido*

las colisiones con otras partículas del fluido, proceso que describió mediante una ecuación diferencial estocástica (*la ecuación de Langevin*), en la que el efecto de las colisiones con otras partículas del fluido era descrito mediante un término de carácter aleatorio.

Los electrones del plasma en un dispositivo de fusión están también sujetos a colisiones (*colisiones culombianas*) con otras partículas del plasma (electrones e iones) de naturaleza estocástica. Por lo que, una descripción apropiada de la dinámica de electrones runaway en plasmas tokamak requiere un tratamiento apropiado del efecto aleatorio de las colisiones culombianas. Dos son los métodos más frecuentemente utilizados para llevar a cabo el tratamiento estocástico de la colisiones culombianas: (1) métodos cinéticos basados en la *ecuación de Fokker-planck* (Sec. 3.2) y (2) la *ecuación de Langevin* (Sec. 3.3). Es este segundo método, en el que nos hemos basado para definir la *ecuación de Langevin para electrones runaway* siguiendo la Ref. [33], lo que constituye una de las principales contribuciones de esta tesis como base del análisis de la dinámica runaway que se realizará en los Capítulos 4 y 5.

### 3.1. Colisiones de Coulomb

Las colisiones culombianas entre partículas cargadas tienen unas características bastante diferentes de las colisiones entre partículas neutras. Las diferencias se ponen claramente de manifiesto cuando se analizan las trayectorias de partículas neutras y partículas cargadas en un gas parcialmente ionizado. Las partículas neutras se mueven independientemente siguiendo trayectorias rectas entre dos colisiones. La colisión cuando los átomos neutros (o moléculas) se aproximan a distancias del orden del radio atómico ( $\sim 1 \text{ \AA} \equiv 10^{-10} \text{ m}$ ). El choque es típicamente inelástico, dando lugar a la dispersión de la partícula neutra en una dirección aleatoria. Por el contrario, cuando una partícula cargada se mueve en un gas ionizado, experimenta simultáneamente las fuerzas culombianas debidas a todas las cargas situadas a su alrededor, y la dirección de su movimiento cambia de forma más suave y continua (Fig. 3.2). Debido al apantallamiento de Debye, sólo las cargas situadas dentro de una esfera de radio del orden de la longitud de Debye ejercerán una fuerza significativa sobre la partícula. Dado que el número de partículas en una esfera de Debye es grande  $[(4/3)\pi n \lambda_D^3 \gg 1]$ , el movimiento de la partícula se ve afectado por un gran número de partículas. El efecto acumulativo de estas



colisiones elásticas coulombianas sucesivas es un movimiento tipo camino aleatorio (*random walk*) similar al *movimiento browniano* descrito anteriormente. En este proceso, el papel principal es desempeñado por las colisiones de larga distancia, en las que la partícula experimenta pequeñas desviaciones, frente a las colisiones cercanas que, aunque individualmente dan lugar a una desviación mayor, se producen con una frecuencia mucho menor.

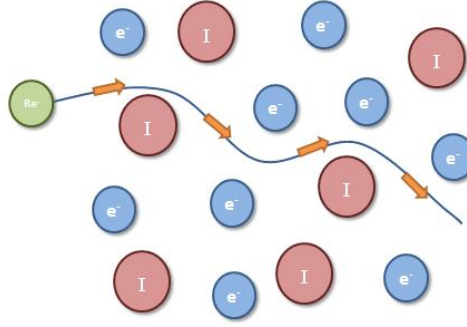


Figura 3.2: Trayectoria de una partícula cargada en un gas ionizado.

Comenzaremos estudiando la colisión de un electrón con iones de carga  $Ze$ , masa  $m_i$  y densidad  $n_i$ , que, debido a su gran masa en comparación con la del electrón ( $m_i \gg m_e$ ), se pueden considerar estacionarios. Este modelo es el denominado *modelo de colisión de Lorentz* o *gas de Lorentz*. Fig. 3.3 muestra un electrón, de velocidad  $v$ , incidiendo sobre un ion con un parámetro de impacto  $b$ ,

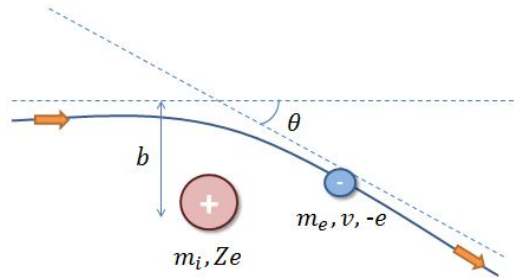


Figura 3.3: Colisión de un electrón con un ión estacionario.

Es sabido que una partícula sujeta a una fuerza central del tipo  $r^{-2}$ , como la interacción coulombiana, describirá una órbita de tipo hiperbólico. El ángulo de desviación,  $\theta$ , para una partícula ligera chocando con otra estacionaria mucho más pesada, viene dado por:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2 b} = \frac{b_0}{b}, \quad (3.1)$$

donde  $b_0 = Ze^2/4\pi\epsilon_0 m_e v^2$  es el parámetro de impacto correspondiente a un ángulo de desviación de  $90^\circ$ .

Dado que la colisión se puede considerar elástica ( $m_e/m_i \ll 1$ ) y que, por tanto, la magnitud  $v$  de la velocidad no cambia, el cambio  $\Delta v_{\parallel}$  en la dirección del movimiento (dirección paralela,  $\parallel$ ) para una colisión de ángulo  $\theta$  (Fig. 3.4) será

$$\Delta v_{\parallel} = -2v \sin^2 \frac{\theta}{2} = -2v \frac{b_0^2}{b_0^2 + b^2}, \quad (3.2)$$

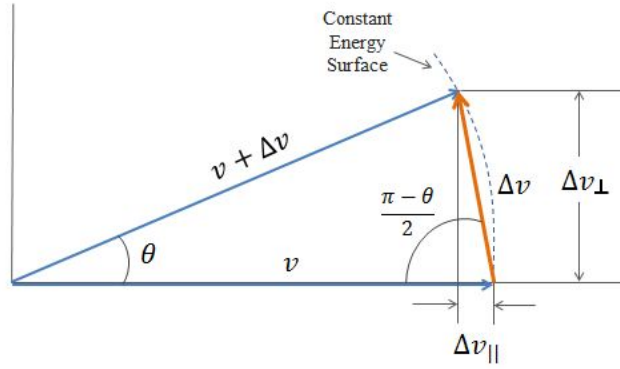


Figura 3.4: Cambio en la velocidad del electrón en una colisión de ángulo  $\theta$  con un ión estacionario.

donde se ha usado que  $|\Delta \vec{v}| = 2v \sin(\theta/2)$  (Fig. 3.4) y que  $\tan \theta/2 = b_0/b$ .

Este es el cambio  $\Delta v_{\parallel}$  correspondiente a una única colisión de ángulo  $\theta$  (o parámetro de impacto  $b$ ). Consideremos ahora el efecto acumulativo de las colisiones con iones con diferentes valores del parámetro de impacto  $b$ . Multiplicando por la sección eficaz,  $d\sigma = 2\pi b db$ , asociada a las colisiones con parámetro de impacto  $b$ , y por el número de iones en el volumen correspondiente a dicha sección eficaz en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ ,  $dN = n_i d\sigma v \Delta t$ , e integrando sobre todos los parámetros de impacto (entre 0 y  $b_{max} \sim \lambda_D$ ), el cambio promedio resultante en la velocidad del electrón por unidad de tiempo es,

$$\frac{\langle \Delta v_{\parallel} \rangle}{\Delta t} = -\frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v^2}, \quad (3.3)$$

$\ln \Lambda \equiv \ln(b_{max}/b_0)$  es el *logaritmo de Coulomb*, que recoge el efecto de todos los parámetros de impacto. En dirección perpendicular al movimiento, dado que no existe una dirección privilegiada para la dispersión, el cambio promedio en la velocidad será nulo.

En resumen, un electrón en un gas de Lorentz experimenta, en promedio, una deceleración en la dirección de su movimiento y, por tanto, estará sujeto a una *fuerza de fricción*,

$$\vec{F}_c = m_e \frac{\langle \Delta \vec{v} \rangle}{\Delta t} \equiv \frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^3} \vec{v} \quad (3.4)$$

A pesar de que, en promedio, el cambio en la velocidad del electrón debido a las colisiones en dirección perpendicular a su movimiento es cero, eso no significa que

su dispersión cuadrática también lo sea. A partir del valor calculado para  $\langle \Delta v_{\parallel} \rangle$ ,  $\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle$  se puede evaluar de forma sencilla teniendo en cuenta que, en la colisión de un electrón con un ión pesado estacionario, la energía cinética del electrón debe conservarse, obteniéndose,

$$\frac{\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle}{\Delta t} = -\frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 v} \quad (3.5)$$

Hasta ahora, hemos supuesto que las partículas con las que chocan los electrones (los iones) permanecían estacionarias. Este análisis se pueden generalizar de forma sencilla al caso en que tanto las partículas incidentes como las partículas blanco se encuentran en movimiento (la partícula incidente puede ser un electrón o un ión e, igualmente, las partículas blanco pueden ser electrones o iones), dando como resultado [34, 35],

$$\frac{\langle \Delta \vec{v} \rangle^{\alpha/\beta}}{\Delta t} = -\frac{n_{\beta} q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_{\alpha} m_{\alpha\beta} u^3} \vec{u} \quad (3.6)$$

$$\frac{\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}}{\Delta t} = \frac{n_{\beta} q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_{\alpha}^2} \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} \quad (3.7)$$

$\alpha$  es la partícula incidente,  $\beta$  la partícula blanco,  $m_{\alpha,\beta}$ ,  $q_{\alpha,\beta}$  sus masas y sus cargas, respectivamente,  $m_{\alpha\beta} = m_{\alpha} m_{\beta} / (m_{\alpha} + m_{\beta})$  la masa reducida,  $\vec{v}, \vec{v}'$  las velocidades de la partícula incidente y la partícula blanco, respectivamente, y  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$  la velocidad relativa.

Finalmente, estos resultados se pueden extender al caso más general en que la partícula incidente colisiona con una población de partículas no monoenergéticas, de función de distribución  $f_{\beta}(\vec{v}')$ , teniendo en cuenta que la densidad de partículas  $\beta$  con velocidad  $\vec{v}'$  está dada por  $dn_{\beta}(\vec{v}') = f_{\beta}(\vec{v}') d\vec{v}'$ , e integrando Eqs. (3.6) y (3.7) sobre  $\vec{v}'$ , lo que lleva a,

$$\frac{\langle \Delta \vec{v} \rangle^{\alpha/\beta}}{\Delta t} = -\frac{q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_{\alpha} m_{\alpha\beta}} \int \frac{\vec{u}}{u^3} f_{\beta}(\vec{v}') d\vec{v}' \quad (3.8)$$

$$\frac{\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}}{\Delta t} = \frac{q_{\alpha}^2 q_{\beta}^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_{\alpha}^2} \int \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} f_{\beta}(\vec{v}') d\vec{v}' \quad (3.9)$$

( $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$ , y  $\delta_{ik} = 1$  si  $i = k$  y cero en caso contrario).

Las cantidades  $A_i^{\alpha/\beta} \equiv \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} / \Delta t$ ,  $B_{ik}^{\alpha/\beta} \equiv \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} / \Delta t$ , dadas por las Eqs. (3.8) y (3.9), respectivamente, permiten describir de forma completa el efecto sobre una partícula test,  $\alpha$ , de las colisiones coulombianas con una población de partículas de función de distribución  $f_{\beta}(\vec{v}')$  y reciben el nombre de *coeficiente de fricción* y *tensor de difusión de velocidades*, respectivamente.

Las expresiones para estos coeficientes se puede simplificar de forma considerable introduciendo dos funciones escalares, los *potenciales de Rosenbluth* [34, 35],

$$H_\beta(\vec{v}) \equiv \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \int \frac{f_\beta(\vec{v}')}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}' \quad (3.10)$$

$$G_\beta(\vec{v}) \equiv \int f_\beta(\vec{v}') |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}' \quad (3.11)$$

en términos de los cuales, el coeficiente de fricción y el tensor de difusión se pueden expresar,

$$A_i^{\alpha/\beta} = \frac{1}{4\pi} L^{\alpha/\beta} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \frac{\partial}{\partial v_i} [H_\beta(\vec{v})] \quad (3.12)$$

$$B_{ik}^{\alpha/\beta} = \frac{1}{4\pi} L^{\alpha/\beta} \frac{\partial}{\partial v_i \partial v_k} [G_\beta(\vec{v})] \quad (3.13)$$

$$(L^{\alpha/\beta} \equiv (q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda / \varepsilon_0^2 m_\alpha^2).$$

Para el caso más frecuente, en el que la función de distribución de las partículas blanco es una maxwelliana, de densidad  $n_\beta$  y temperatura  $T_\beta$ ,

$$f_\beta(v) = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi T_\beta}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\beta v^2}{2T_\beta}\right) = \frac{n_\beta}{(2\pi v_{T,\beta}^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{T,\beta}^2}\right) \quad (3.14)$$

donde  $v_{T,\beta} \equiv (T_\beta/m_\beta)^{1/2}$  es la velocidad térmica asociada a dicha especie, se puede demostrar que

$$H_\beta(\vec{v}) = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) n_\beta \frac{\phi(v/\sqrt{2} v_{T,\beta})}{v}, \quad (3.15)$$

$$G_\beta(\vec{v}) = n_\beta \left\{ \frac{v_{T,\beta}}{\sqrt{2}} \phi'(v/\sqrt{2} v_{T,\beta}) + \left(v + \frac{v_{T,\beta}^2}{v}\right) \phi(v/\sqrt{2} v_{T,\beta}) \right\} \quad (3.16)$$

$\phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$  es la función error, y  $\phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ .

Sustituyendo estas expresiones de los potenciales de Rosenbluth en Eqs. (3.12), (3.13) para el coeficiente de fricción,  $A_i^{\alpha/\beta}$ , y el tensor de difusión  $B_{ik}^{\alpha/\beta}$ , se obtiene

$$A_i^{\alpha/\beta} = -\Gamma^{\alpha/\beta} \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta v_{T,\beta}^2} \psi(x_\beta) \frac{v_i}{v} \quad (3.17)$$

$$B_{ik}^{\alpha/\beta} = \Gamma^{\alpha/\beta} \left[ \delta_{ik} \frac{\phi(x_\beta) - \psi(x_\beta)}{v} - \frac{v_i v_k}{v^3} (\phi(x_\beta) - 3\psi(x_\beta)) \right] \quad (3.18)$$

$\Gamma^{\alpha/\beta} \equiv n_\beta L^{\alpha/\beta}/4\pi = n_\beta (q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda / \varepsilon_0^2 m_\alpha^2$ ,  $x_\beta \equiv v/\sqrt{2} v_{T,\beta}$ , y  $\psi(x) \equiv (\phi(x) - x \phi'(x))/2x^2$  es la función de Chandrasekhar.

Finalmente, definiendo

$$\begin{aligned} h_{\alpha/\beta}(x_\beta) &\equiv \Gamma^{\alpha/\beta} \frac{\phi(x_\beta) - \psi(x_\beta)}{v} \\ g_{\alpha/\beta}(x_\beta) &\equiv \Gamma^{\alpha/\beta} \frac{2\psi(x_\beta)}{v}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$B_{ik}^{\alpha/\beta}$  puede reescribirse

$$B_{ik}^{\alpha/\beta} = h_{\alpha/\beta} \delta_{ik} - (h_{\alpha/\beta} - g_{\alpha/\beta}) \frac{v_i v_k}{v^2}. \quad (3.20)$$

## 3.2. Tratamiento cinético. Ecuación de Fokker - Planck

Para poder incluir correctamente el efecto estocástico de las colisiones existen dos vías equivalentes. Por un lado la *ecuación de Fokker-Planck* [36] y [37] que es una de las ecuaciones cinéticas más usadas dentro de la física del plasma, y por el otro la *ecuación de Langevin* que representa la aproximación de partícula del sistema mediante una ecuación diferencial estocástica.

### 3.2.1. Función de distribución. Ecuación cinética

La teoría cinética constituye una aproximación estadística en la que cada especie del plasma es descrita mediante su *función de distribución*. La función distribución,  $f(t, \vec{r}, \vec{v})$  nos describe cómo se reparten las partículas de una especie del plasma en el espacio de posiciones y velocidades:  $f(t, \vec{r}, \vec{v}) d\vec{r} d\vec{v}$  es la densidad de partículas localizadas en  $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$  y con velocidad en el intervalo  $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$ . La densidad total de partículas en un punto  $\vec{r}$  se obtiene así integrando sobre las velocidades:

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v} \quad (3.21)$$

Las partículas en el plasma se mueven de acuerdo a las ecuaciones del movimiento

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}; \quad \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (3.22)$$

donde  $q$  es la carga de la partícula y  $m$  su masa, y  $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  es la fuerza de Lorentz.

En ausencia de colisiones, la derivada total de la función de distribución  $f$  con respecto del tiempo,  $df/dt$ , que puede interpretarse como el cambio en la función de distribución visto desde un sistema de referencia que se mueve con las partículas, debe ser cero:  $df/dt = 0$ . Por tanto, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla f + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (3.23)$$

y, usando que  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ ,  $d\vec{v}/dt = \vec{F}/m = q/m(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (3.24)$$

Esta es la *ecuación de Vlasov*, que permite discernir la evolución de la función de distribución en ausencia de colisiones. Si existen colisiones, las partículas pueden ser dispersadas en el espacio de fases, de modo que  $df/dt$  será distinto de cero. Si designamos por  $C(f) \equiv (\partial f / \partial t)_c$  el cambio por unidad de tiempo en la función de distribución debido al efecto de las colisiones, la ecuación cinética toma la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C(f), \quad (3.25)$$

La forma del *operador de colisión*,  $C(f)$ , dependerá de las colisiones dominantes en el sistema. El operador de colisión para las colisiones culombianas, que es el caso que aquí nos interesa, es el *operador de colisión de Fokker-Planck*, y la ecuación cinética resultante, la *ecuación de Fokker-Planck*.

### 3.2.2. Operador de colisión de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck constituye una de las ecuaciones cinéticas más usadas dentro de la Física de Plasmas. La aproximación de Fokker-Planck al operador de colisión se basa en que las colisiones culombianas dominantes son las de largo alcance y que, por tanto, se puede suponer que el cambio  $\Delta v$  en la velocidad de la partícula debido a dichas colisiones debe ser muy pequeño en comparación con su velocidad  $v$  ( $\Delta v \ll v$ ).

Sea  $\Delta \vec{v}$  el cambio en la velocidad de la partícula debido a las colisiones culombianas en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  ( $\Delta v \ll v$ ). Designaremos por  $P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) d(\Delta \vec{v})$  la probabilidad de que una partícula con velocidad  $\vec{v}$  experimente un cambio en su velocidad  $[\Delta \vec{v}, \Delta \vec{v} + d(\Delta \vec{v})]$ , debido a las colisiones culombianas, en dicho intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Por tanto:

$$\int P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) d(\Delta \vec{v}) = 1 \quad (3.26)$$

Si la función de distribución en el instante  $t$  es  $f(\vec{v}, t)$ , entonces el cambio que experimenta en el intervalo  $\Delta t$  debido a las colisiones culombianas será:

$$C(f) \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \Delta t = f(\vec{v}, t + \Delta t) - f(\vec{v}, t) \quad (3.27)$$

Ahora bien,

$$f(\vec{v}, t + \Delta t) = \int f(\vec{v} - \Delta \vec{v}, t) P(\vec{v} - \Delta \vec{v}, \Delta \vec{v}) d(\Delta \vec{v}) \quad (3.28)$$

Como  $\Delta \vec{v}$  es muy pequeño, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned} f(\vec{v} - \Delta \vec{v}, t) P(\vec{v} - \Delta \vec{v}, \Delta \vec{v}) \approx \\ f(\vec{v}, t) P(\vec{v}, \Delta \vec{v}) - \sum_i \Delta v_i \frac{\partial(fP)}{\partial v_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \Delta v_i \Delta v_k \frac{\partial^2(fP)}{\partial v_i \partial v_k} \end{aligned} \quad (3.29)$$

y así,

$$\begin{aligned}
 f(\vec{v}, t + \Delta t) &= \int f(\vec{v} - \Delta\vec{v}, t) P(\vec{v} - \Delta\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) \approx \\
 &f(\vec{v}, t) \int P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) - \\
 &\sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left( f \int \Delta v_i P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) \right) + \\
 &\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left( f \int \Delta v_i \Delta v_j P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Si tenemos ahora en cuenta que  $\int P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v}) = 1$  y que

$$\langle \Delta v_i \rangle \equiv \int (\Delta v_i) P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v})$$

representa el cambio promedio en la velocidad de las partículas en un tiempo  $\Delta t$  debido a las colisiones culombianas, y

$$\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle \equiv \int (\Delta v_i \Delta v_k) P(\vec{v}, \Delta\vec{v}) d(\Delta\vec{v})$$

es el valor promedio de  $\Delta v_i \Delta v_k$ , entonces podremos escribir:

$$\begin{aligned}
 f(\vec{v}, t + \Delta t) &\approx f(\vec{v}, t) - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f \langle \Delta v_i \rangle) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} (f \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Finalmente, sustituyendo en (3.27), tendremos

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \Delta t &= f(\vec{v}, t + \Delta t) - f(\vec{v}, t) \approx \\
 &- \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f \langle \Delta v_i \rangle) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (f \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

y el término colisional,  $C(f) \equiv (\partial f / \partial t)_c$ , tomará la forma:

$$\begin{aligned}
 C(f) &\equiv \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \approx - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} \left( f \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left( f \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{\Delta t} \right)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

De este modo, en la aproximación de Fokker-Planck, el operador de colisión está completamente determinado por los coeficientes  $A_i \equiv \langle \Delta v_i \rangle / \Delta t$  y  $B_{ik} \equiv$

$\langle \Delta v_i \Delta v_i \rangle / \Delta t$  definidos en la sección 3.1 y que, a partir de ahora, denominaremos *coeficientes de Fokker-Planck*,

$$C(f) \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \frac{\partial}{\partial v_i} \left( A_i f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_k} B_{ik} f \right) \quad (3.34)$$

en donde, por simplicidad, se ha omitido la suma sobre los índices repetidos.

Es interesante hacer notar que el término colisional (3.34) en la ecuación de Fokker-Planck puede interpretarse como un flujo de partículas en el espacio de velocidades,

$$C(f) \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \frac{\partial J_i}{\partial v_i} \quad (3.35)$$

dado por la suma de un término convectivo,  $A_i f$ , determinado por el coeficiente  $A_i$ , más un flujo difusivo,  $-\partial (B_{ik} f / 2) / \partial v_k$ , determinado por  $B_{ik}$ :  $J_i = A_i f - \partial (B_{ik} f / 2) / \partial v_k$ .

### 3.2.3. Ecuación de Fokker-Planck para electrones runaway

La ecuación de Fokker-Planck es frecuentemente utilizada para el análisis de la dinámica de los electrones runaway bajo la acción del campo eléctrico toroidal y de las colisiones con los electrones e iones del plasma [11], [38]. Varias hipótesis permiten simplificar este tratamiento. En primer lugar, se suele suponer que la función de distribución de los electrones runaway,  $f_e$ , es homogénea espacialmente ( $\nabla f_e = 0$ ), lo que simplifica la ecuación de Fokker-Planck a

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{e}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}} = C(f_e), \quad (3.36)$$

El operador de colisión,  $C(f_e)$ , incluye las colisiones con todas las especies del plasma,

$$C(f_e) = \sum_{\beta} C_{e\beta}(f_e, f_{\beta}), \quad (3.37)$$

donde  $C_{e\beta}(f_e, f_{\beta})$  es el operador de Fokker-Planck para las colisiones de los electrones runaway con la especie  $\beta$  del plasma.

Una segunda hipótesis importante es que, dado que el número de electrones runaway es siempre mucho menor que el número de electrones e iones térmicos del plasma, se pueden despreciar las colisiones entre los electrones runaway, lo que permite linealizar el operador de colisión en la función de distribución runaway,

$$C(f_e) \approx C_{e/e}(f_e, f_{m,e}) + \sum_{iones} C_{e/\beta}(f_e, f_{m,\beta}) \quad (3.38)$$

donde  $f_{m,e}$ ,  $f_{m,\beta}$  indican las función de distribución (maxwelliana) para los electrones e iones térmicos del plasma, respectivamente.



Más aún, como los electrones runaway son muy rápidos en comparación con los electrones e iones térmicos ( $v \gg v_{T,\beta}$ ), las expresiones para los coeficientes de Fokker-Planck,  $A_i^{e/\beta}$ ,  $B_{ik}^{e/\beta}$ , para las colisiones con una población  $\beta$  [Eqs. (3.17) y (3.18)] se pueden simplificar teniendo en cuenta que, en ese caso,  $x_\beta \equiv v/\sqrt{2}v_{T,\beta} \gg 1$  y, por tanto,  $\phi(x_\beta) \approx 1$  y  $\phi'(x_\beta) \ll 1$ , lo que conduce al *límite de alta velocidad* para el operador de Fokker-Planck para electrones runaway [39],

$$C(f_e) \approx \Gamma \left[ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} B \left( \frac{v_{T,e}^2}{v} \frac{\partial f_e}{\partial v} + f_e \right) + \frac{A}{2v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] \quad (3.39)$$

donde  $\mu = v_{||}/v$  ( $||$  indica la dirección paralela al campo magnético, aproximadamente toroidal),  $\Gamma \equiv n_e e^4 \ln \Lambda / 4\pi \epsilon_0^2 m_e^2$ ,  $A \simeq 1 + Z_{eff}$  y  $B \simeq 1$ .

Son numerosos los estudios realizados sobre dinámica runaway basados en la ecuación cinética de Fokker-Planck. Destacan en particular los trabajos sobre la producción Dreicer de electrones runaway en plasmas sujetos campos eléctricos suficientemente débiles ( $E_{||} \ll E_D$ ). La producción runaway es calculada resolviendo la ecuación de Fokker-Planck en estado estacionario (numéricamente o mediante aproximaciones analíticas) [8, 11, 12, 40, 41], lo que ha permitido obtener aproximaciones analíticas razonables [Ec. (2.8)],

$$\frac{dn_r}{dt} = n_e \nu_e K(Z_{eff}) \epsilon^{-\frac{3(1+Z_{eff})}{16}} \exp \left( -\frac{1}{4\epsilon} - \sqrt{\frac{1+Z_{eff}}{\epsilon}} \right) \quad (3.40)$$

( $\epsilon = E_{||}/E_D$ ).

### 3.3. La aproximación de Langevin

La aproximación de Langevin proporciona un método alternativo, y equivalente a la descripción cinética de Fokker-Planck, para el análisis de la dinámica runaway bajo el efecto estocástico de las colisiones coulombianas. Como se verá en los Capítulos 4 y 5, el método de Langevin tiene la ventaja de proporcionar una "visión" de partícula, especialmente adecuada para la discusión de las condiciones para la generación runaway (Capítulo 4), al tiempo que permitirá obtener información sobre la función de distribución runaway y la producción Dreicer de electrones runaway (Capítulo 5).

#### 3.3.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas. La ecuación de Langevin

El nombre *proceso estocástico* está generalmente asociado a una trayectoria que es lo suficientemente aleatoria como para requerir una descripción probabilística. El ejemplo paradigmático es el *movimiento browniano*, descubierto por el botánico Robert Brown en 1827, en el que, partículas de polen en suspensión realizan movimientos erráticos. Fue Einstein en 1905 [42] el primero en proporcionar una explicación del movimiento browniano, basado en una descripción probabilística del movimiento de las partículas mediante una función de distribución de probabilidad,  $P(\Delta)$ , que proporciona la probabilidad de que una partícula experimente

un cierto desplazamiento,  $\Delta$ , al cabo de un cierto tiempo característico,  $\tau$ . Como resultado, obtiene la *ecuación de difusión*,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n, \quad (3.41)$$

que describe la evolución de la densidad de partículas brownianas como resultado de su movimiento aleatorio, y donde el coeficiente de difusión,  $D$ , está determinado por la función de distribución,  $P(\Delta)$ ,

$$D = \frac{1}{2\tau} \int \Delta^2 P(\Delta) d\Delta = \frac{\langle \Delta^2 \rangle}{2\tau} \quad (3.42)$$

Langevin propuso en 1908 un tratamiento alternativo [32], complementario al de Einstein. Langevin propuso centrarse en la trayectoria de una única partícula browniana, que sería descrita por la segunda ley de Newton,  $F = m a$ , y en la que habría que incluir una fuerza *fluctuante*,  $\xi$ , que representara el efecto aleatorio de las colisiones con las moléculas del fluido:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{vis} + \xi \quad (3.43)$$

donde  $F_{vis} = -6\pi\eta a v$  es la fuerza de viscosidad debido al fluido ( $\eta$  es la viscosidad del fluido y  $a$  el radio de las partículas brownianas).

Basándose en ciertas suposiciones básicas sobre la fuerza aleatoria  $\xi$ ,

$$\langle \xi \rangle = 0; \quad \langle x \cdot \xi \rangle = 0,$$

multiplicando Ec. (3.43) por la posición  $x$  de la partícula, y tomando un promedio en la ecuación resultante sobre todas las realizaciones de la fuerza  $\xi$ , obtuvo el valor promedio del cuadrado de la posición de la partícula browniana,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{kT}{\pi\eta a} t, \quad (3.44)$$

que no es sino la ley de difusión de Einstein, con un valor del coeficiente de difusión,

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \quad (3.45)$$

La Ec. (3.43) constituye el primer ejemplo en la Física de una *ecuación diferencial estocástica*. Este tipo de ecuación se define por medio de una ecuación diferencial que incluye un proceso estocástico  $\xi(t)$  [43]:

$$\frac{dv}{dt} = G(v(t), t, \xi(t)) \quad (3.46)$$

Como consecuencia, una ecuación diferencial estocástica no es una simple ecuación diferencial sino, más bien, una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias, una diferente para cada realización de  $\xi(t)$ .

Cuando el proceso estocástico  $\xi(t)$  aparece linealmente en la ecuación, como en el caso de Ec. (3.43), se dice que tenemos una *ecuación de Langevin*, de forma general,

$$\frac{dv}{dt} = F(v, t) + D(v, t) \xi(t) \quad (3.47)$$

$\xi(t)$  recibe frecuentemente el nombre de término de *ruido*. Si la función  $D$  es constante, se dice que el ruido es *aditivo* y, en caso contrario, *multiplicativo*. Finalmente,  $F(v, t)$  se suele denominar *término de deriva*, mientras que  $D(v, t)$  es el *término de difusión*.

El término de ruido,  $\xi(t)$ , en la ecuación de Langevin es un término de *ruido blanco*. Intuitivamente, el ruido blanco representa una serie de pulsos actuando en una escala temporal muy pequeña y de alta intensidad, de modo que su efecto es finito. El ruido blanco se puede considerar como el límite ideal de un proceso físico estocástico en el límite de un tiempo de correlación muy pequeño. Formalmente, se define como un *proceso aleatorio gaussiano*, de media cero y varianza uno,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (3.48)$$

Desde un punto de vista matemático, surgen ciertos problemas de interpretación a la hora de integrar la ecuación de Langevin, ya que, cuando el ruido es multiplicativo, el proceso resultante  $v(t)$  no es, en general, una función continua de  $t$ . Cuando esto ocurre, hay una ambigüedad en ciertas expresiones matemáticas. Las interpretaciones más frecuentes son las de Itô y Stratonovich [43]. Sin entrar en detalles, el problema radica en cómo realizar el cálculo de una integral del tipo

$$\int_t^{t+h} ds D(v(s)) \xi(s)$$

en el límite  $h \rightarrow 0$ . En algún sentido, está relacionado al problema de definir la integral en la que aparece la función  $\delta$  de Dirac:

$$\int_0^\infty \delta(t) dt$$

que puede definirse como igual a 1 (regla de Itô) o 1/2 (regla de Stratonovich). Aunque se ha discutido mucho sobre cuál es la interpretación correcta, resulta claro ahora que es una cuestión de convenio, es decir, que la ecuación de Langevin no está completamente definida hasta que se decida qué interpretación usar. Ambas reglas de integración dan respuestas diferentes y uno debería especificar desde el principio qué interpretación se está usando. La regla de Stratonovich suele ser la más natural para los problemas físicos [43] y es la que vamos a usar en esta memoria.

Del mismo modo que, como se explicó antes, la ecuación de Langevin para el movimiento browniano era equivalente a la descripción de Einstein, basada en la función de distribución de probabilidad  $f(\Delta)$ , se puede demostrar que todo proceso aleatorio descrito por la ecuación de Langevin (3.47), se puede describir mediante una ecuación de Fokker-Planck,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} \left( Af + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (Bf) \right) \quad (3.49)$$

La equivalencia entre ambas descripciones es descrita por la relación entre los coeficientes de Langevin,  $F, D$ , y Fokker-Planck,  $A, B$ , dada por [43], [44]:

$$D = B^{1/2}; \quad F = A - \chi D \frac{\partial D}{\partial v} \quad (3.50)$$

donde  $\chi = 1$  si se usa el álgebra de Itô, y  $\chi = 1/2$  en el caso del álgebra de Stratonovich.

Los resultados anteriores se pueden generalizar de forma inmediata al caso, como el que aquí nos ocupa, del movimiento de una partícula en tres dimensiones. La ecuación de Langevin se escribirá

$$\frac{dv_i}{dt} = F_i(\vec{v}, t) + D_{ik}(\vec{v}, t) \xi(t) \quad (3.51)$$

y la relación entre los coeficientes de Langevin y Fokker-Planck,

$$D_{ij}D_{jk} = B_{ik}; \quad F_i = A_i - \chi D_{jk} \frac{\partial D_{ik}}{\partial v_j} \quad (3.52)$$

### 3.3.2. Coeficientes de Langevin para colisiones coulombianas con el plasma térmico

Con el fin de obtener la ecuación de Langevin que permita describir la dinámica runaway en un plasma tokamak, es necesario evaluar el efecto de las colisiones coulombianas de los electrones runaway con las partículas del plasma. El uso de ecuaciones diferenciales estocásticas para la descripción de las colisiones de una partícula con las especies del plasma fue propuesto y empleado por primera vez por Ivanov y Shevts [45, 46], y ha sido aplicado en el pasado a la dinámica de electrones supratérmicos durante *current drive* [47], así como a la simulación de electrones runaway en el plasma [48].

El análisis que presentaremos aquí se basará en el tratamiento de Langevin empleado en Ref. [33], en el que se considera el efecto de las colisiones de electrones rápidos con una población maxwelliana de electrones térmicos y de iones en reposo. La aproximación que usaremos en esta memoria será no relativista, adecuada para la investigación de las condiciones de generación y la dinámica de electrones runaway en plasmas sujetos a campos eléctricos débiles (siempre y cuando  $E_{||}$  no sea excesivamente pequeño,  $E_{||}/E_D < kT_e/m_e c^2$ , en cuyo caso deben tenerse en consideración efectos relativistas [8]) que se realizará en los Capítulos 4 y 5.

En ese caso, los coeficientes de Fokker-Planck que describen las colisiones de los electrones runaway con el plasma térmico estarán dados por Ecs. (3.17), (3.20) donde  $\alpha \equiv e$  (electrones runaway) y  $\beta$  se refiere a los electrones e iones térmicos. Siguiendo Ref. [33], se puede demostrar que el término de difusión,  $D_{ik}$ , en la ecuación de Langevin se puede escribir

$$D_{ik}^{e/\beta} = h_{e/\beta}^{1/2} \delta_{ik} - \left( h_{e/\beta}^{1/2} - g_{e/\beta}^{1/2} \right) \frac{v_i v_k}{v^2}, \quad (3.53)$$

que, fácilmente, se puede comprobar que verifica la relación (3.52),  $D_{ij}^{e/\beta} D_{jk}^{e/\beta} = B_{ik}^{e/\beta}$ .

Para obtener el término de deriva,  $F_i^{e/\beta}$ , en la ecuación de Langevin usaremos el álgebra de Stratonovich ( $\chi = 1/2$ ) en Ec. (3.52). Calcularemos primero

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{ik}^{e/\beta}}{\partial v_j} &= \frac{1}{2} h_{e/\beta}^{-1/2} \frac{\partial h_{e/\beta}}{\partial v_j} - \frac{1}{2} \left( h_{e/\beta}^{-1/2} \frac{\partial h_{e/\beta}}{\partial v_j} - g_{e/\beta}^{-1/2} \frac{\partial g_{e/\beta}}{\partial v_j} \right) \frac{v_i v_k}{v^2} \\ &\quad - \left( h_{e/\beta}^{1/2} - g_{e/\beta}^{1/2} \right) \left( \frac{\delta_{ij} v_k + v_i \delta_{jk}}{v^2} - 2 \frac{v_i v_j v_k}{v^4} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

así que, después de algunos cálculos,

$$\begin{aligned} \Delta F_i^{e/\beta} &\equiv D_{jk}^{e/\beta} \frac{\partial D_{ik}^{e/\beta}}{\partial v_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial h_{e/\beta}}{\partial v_i} + \frac{v_i v_j}{v^2} \frac{\partial (g_{e/\beta} - h_{e/\beta})}{\partial v_j} \right] \\ &\quad - 2 \left[ h_{e/\beta} - (h_{e/\beta} g_{e/\beta})^{1/2} \right] \frac{v_i}{v^2} = \\ &= \frac{g'_{e/\beta}}{2} \frac{v_i}{v} - 2 \left[ h_{e/\beta} - (h_{e/\beta} g_{e/\beta})^{1/2} \right] \frac{v_i}{v^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalmente, usando ( $\chi = 1/2$ , álgebra de Stratonovich) en Ec. (3.52), se obtiene:

$$\begin{aligned} F_i^{e/\beta} &= A_i^{e/\beta} - \frac{1}{2} \Delta F_i^{e/\beta} \equiv D_{jk}^{e/\beta} \\ &= A_i^{e/\beta} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{g'_{e/\beta}}{2} \frac{v_i}{v} - 2 \left[ h_{e/\beta} - (h_{e/\beta} g_{e/\beta})^{1/2} \right] \frac{v_i}{v^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

con

$$A_i^{e/\beta} = -\Gamma^{e/\beta} \frac{m_e + m_\beta}{m_\beta v_{T,\beta}^2} \psi(x_\beta) \frac{v_i}{v} \quad (3.57)$$

y  $h_{e/\beta}$ ,  $g_{e/\beta}$  y  $g'_{e/\beta}$  dados por (Ecs. 3.19):

$$\begin{aligned} h_{e/\beta}(x_\beta) &= \Gamma^{e/\beta} \frac{\phi(x_\beta) - \psi(x_\beta)}{v} \\ g_{e/\beta}(x_\beta) &= \Gamma^{e/\beta} \frac{2\psi(x_\beta)}{v} \\ g'_{e/\beta}(x_\beta) &= 2\Gamma^{e/\beta} \frac{\phi(x_\beta) - (2x_\beta^2 + 3)\psi(x_\beta)}{v^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

$\phi$  y  $\psi$  son la función error y la función de Chandrasekhar, respectivamente,  $x_\beta \equiv v/\sqrt{2}v_{T,\beta}$ ,  $v_{T,\beta} \equiv (T_\beta/m_\beta)^{1/2}$ , and  $\Gamma^{e/\beta} \equiv n_\beta (eq_\beta)^2 \ln \Lambda / 4\pi \varepsilon_0^2 m_e^2$ .

### 3.3.3. La ecuación de Langevin para electrones runaway

Una vez que se han determinado los coeficientes de Langevin, se puede obtener el correspondiente término estocástico en la ecuación de Langevin,  $D_{ik}^{e/\beta} \xi_k$ ,

$$\begin{aligned}
 D_{ik}^{e/\beta} \xi_k &= h_{e/\beta}^{1/2} \xi_i - \left( h_{e/\beta}^{1/2} - g_{e/\beta}^{1/2} \right) \frac{\vec{v} \cdot \vec{\xi}}{v^2} v_i \\
 &= g_{e/\beta}^{1/2} \xi_i - \left( h_{e/\beta}^{1/2} - g_{e/\beta}^{1/2} \right) \frac{[\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\xi})]_i}{v^2}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

con  $[\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\xi})]_i = v_i(v_k \xi_k) - \xi_i v^2$ .

Como ocurriera con la ecuación de Fokker-Planck, en el caso de las colisiones de los electrones runaway con los iones térmicos, los coeficientes de Langevin correspondientes se pueden simplificar de forma considerable teniendo en cuenta que  $m_e/m_\beta \ll 1$  y que, por tanto, los iones se pueden suponer en reposo (aproximación de iones fríos), ya que,  $v \gg v_{T,\beta}$ , de modo que  $\phi(x_\beta) \approx 1$ ,  $\psi(x_\beta), \phi'(x_\beta) \ll 1$  y, sumando sobre todas las especies iónicas del plasma,

$$\begin{aligned}
 A_i^{e/ions} &= \sum_\beta A_i^{e/\beta} \approx -\Gamma^{e/e} \frac{Z_{eff}}{v^3} v_i \\
 h_{e/ions} &= \sum_\beta h_{e/\beta} \approx \Gamma^{e/e} \frac{Z_{eff}}{v} \\
 g_{e/ions} &= \sum_\beta g_{e/\beta} \ll 1 \\
 g'_{e/ions} &= \sum_\beta g'_{e/\beta} \ll 1
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

( $Z_{eff} \equiv \sum_\beta n_\beta Z_\beta^2 / n_e$  es la carga iónica efectiva),

$$F_i^{e/ions} \approx 0; \quad D_{ik}^{e/ions} \approx \left( \frac{\Gamma^{e/e} Z_{eff}}{v} \right)^{1/2} \left( \delta_{ik} - \frac{v_i v_k}{v^2} \right) \tag{3.61}$$

y

$$D_{ik}^{e/ions} \xi_k \approx - \left( \frac{\Gamma^{e/e} Z_{eff}}{v} \right)^{1/2} \frac{[\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\xi})]_i}{v^2} \tag{3.62}$$

Finalmente, la ecuación de Langevin para los electrones runaway en la aproximación no relativista se podrá obtener teniendo cuenta: (1) la aceleración debida al campo eléctrico en la dirección toroidal,  $e\vec{E}_\parallel/m_e$ ; (2) la contribución de las colisiones con los electrones e iones térmicos (términos estocásticos en la ecuación de Langevin); (3) la aproximación de iones fríos para las colisiones con los iones térmicos; (4) el efecto de las colisiones entre los electrones runaway es despreciable. La ecuación resultante es:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{v}}{dt} = & \frac{e\vec{E}_{\parallel}}{m_e} - \Gamma^{e/e} \left\{ -\frac{\phi + (1 - (3v^2/v_{T,e}^2))\psi}{2} + [2\psi(\phi - \psi)]^{1/2} \right\} \frac{\vec{v}}{v^3} \\
 & + \left( \frac{2\Gamma^{e/e}}{v} \right)^{1/2} \vec{\xi} - \left( \frac{\Gamma^{e/e}}{v} \right)^{1/2} \times [(\phi - \psi)^{1/2} - (2\psi)^{1/2}] \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\xi})}{v^2} \\
 & - \left( \frac{\Gamma^{e/e} Z_{eff}}{v} \right)^{1/2} \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\eta})}{v^2}
 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nótese que se han introducido dos ruidos gaussianos independientes,  $\xi$  y  $\eta$ , para describir el efecto de las colisiones con los electrones e iones térmicos, respectivamente;  $\phi$  y  $\psi$  son funciones de  $x_e \equiv v/\sqrt{2}v_{T,e}$ , y  $\Gamma^{e/e} \equiv n_e e^4 \ln \Lambda / 4\pi \varepsilon_0^2 m_e^2$ .

La Ec. (3.63) se puede reescribir en forma normalizada,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{v}}{d\tau} = & \vec{\epsilon} - \frac{\vec{v}}{v^3} \left[ -\frac{1}{2}(\phi + \psi(1 - 3v^2)) + (2\psi(\phi - \psi))^{1/2} \right] \\
 & + \left( \frac{1}{v} \right)^{1/2} (2\psi)^{1/2} \vec{\xi} - \left( \frac{1}{v} \right)^{1/2} [(\phi - \psi)^{1/2} - (2\psi)^{1/2}] \\
 & \times \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\xi})}{v^2} - \left( \frac{Z_{eff}}{v} \right)^{1/2} \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\eta})}{v^2}
 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$\vec{v}$  está normalizado a la velocidad térmica del electrón,  $v_{T,e} \equiv (T_e/m_e)^{1/2}$ , y  $\tau \equiv t\nu_e$ , donde  $\nu_e \equiv n_e e^4 \ln \Lambda / 4\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 v_{T,e}^3$ , es el tiempo normalizado al tiempo de colisión de los electrones térmicos;  $\epsilon$  es el campo eléctrico normalizado al campo Dreicer,  $\epsilon \equiv E_{\parallel}/E_D$ ,  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  se evalúan en  $x \equiv v/\sqrt{2}$ , y  $\vec{\xi}, \vec{\eta}$  son ruidos blancos aleatorios en la nueva variable temporal  $\tau$ .

### 3.3.4. Solución numérica de la ecuación de Langevin

La Ec. (3.64) será la forma de la ecuación de Langevin que usaremos en las Capítulos 4 y 5 dedicados al análisis de la generación y dinámica runaway. Con este fin, se ha desarrollado un código tipo Monte-Carlo que simula el comportamiento del sistema a partir de unas condiciones iniciales de función de densidad de probabilidad (PDF). Este código construye un modelo estocástico que, basándose en las PDF, evoluciona en el tiempo una serie de eventos individuales de variable aleatoria, hasta que alcanza una condición estacionaria.

Para poder resolver numéricamente la Ec.(3.64) se introducen dos variables gaussianas aleatorias independientes  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$  que, como se ha dicho, determinan el efecto de las colisiones con electrones e iones térmicos. Estas variables aleatorias se generan utilizando el algoritmo Box-Muller-Wiener siguiendo la Ref. [43], de forma que si  $r_1$  y  $r_2$  son números aleatorios uniformemente distribuidos en un intervalo  $(0, 1)$ , entonces la transformación:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \sqrt{-2 \ln(r_1)} \cos(2\pi r_2) \\
 g_2 &= \sqrt{-2 \ln(r_1)} \sin(2\pi r_2)
 \end{aligned} \quad (3.65)$$

nos devuelve  $(g_1, g_2)$  dos números aleatorios gaussianos uniformemente distribuidos, de valor principal cero y varianza unidad, que serán utilizados para generar el conjunto de variables gaussianas independientes  $u(t)$ . Este conjunto de variables se definen por medio de un conjunto temporal discreto  $(t = 0, h, 2h, \dots)$  de valor principal cero y varianza la unidad. En función de esta variable se define el proceso de ruido blanco como una derivada del *proceso de Wiener* o movimiento browniano,

$$\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt} \Rightarrow w_h(t) = \int_t^{t+h} ds \xi(s) = h^{1/2} u(t) \quad (3.66)$$

siendo  $w_h(t) = W(t+h) - W(t)$  la diferencia del proceso de Wiener en dos instantes distintos de tiempo, que es también un proceso gaussiano caracterizado por,

$$\begin{aligned} \langle w_h(t) \rangle &= 0 \\ \langle w_h(t_i) w_h(t_j) \rangle &= h \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.67)$$

La ecuación que determina el comportamiento de los electrones runaway depende de variable aleatorias, es decir se trata de una *ecuación diferencial estocástica* (SDE), por lo que no puede ser resuelta mediante métodos habituales como Runge-Kutta, ya que el término de ruido gaussiano es una función irregular, no diferenciable. Por este motivo utilizamos algoritmos de integración sobre una SDE del tipo,

$$\dot{x}(t) = q(x) + g(x)\xi(t) \quad (3.68)$$

La integral sobre Ec.(3.68) será

$$x(t+h) - x(t) = \int_t^{t+h} q(x(s)) ds + \int_t^{t+h} g(x(s)) \xi(s) ds \quad (3.69)$$

y considerando que las funciones  $q(x)$  y  $g(x)$  son funciones diferenciables, se les puede realizar un expansión Taylor en torno a  $x(t)$ ,

$$\begin{aligned} q(x(s)) &= q(x(t)) + \frac{dq}{dx} \Big|_{x(t)} (x(s) - x(t)) + O[(x(s) - x(t))^2] \\ g(x(s)) &= g(x(t)) + \frac{dg}{dx} \Big|_{x(t)} (x(s) - x(t)) + O[(x(s) - x(t))^2] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Este desarrollo permitirá la integración de la ecuación SDE (3.68) como,

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= h q(x(t)) + h O[x(s) - x(t)] + w_h(t) g(x(t)) \\ &\quad + w_h(t) O[x(s) - x(t)] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Utilizando el menor orden posible de esta expansión ( $q(x(s)) = q(x(t))$ ,  $g(x(s)) = g(x(t))$ ) en la Ec.(3.69), y siguiendo el proceso establecido en Ref. [43], nos conduce a una expresión de orden  $h^{1/2}$  como en la Ec.(3.66),

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= h^{1/2} g(x(t)) u(t) + h \left[ q(x(t)) + \frac{1}{2} g(x(t)) g'(x(t)) u(t)^2 \right] \\ &\quad + O[h^{3/2}] \end{aligned} \quad (3.72)$$



Esta relación es conocida como el *Método Milshtein* [49]. En nuestro caso el ruido es aditivo  $g'(x) = 0$  por lo que el algoritmo resultante se conoce como *algoritmo de Euler*.

$$x(t+h) = x(t) + hq(x(t)) + g(x(t))h^{1/2}u(t) + O[h^{3/2}] \quad (3.73)$$

Las condiciones iniciales de simulación de este programa vienen dadas por un fichero en el que se definen el número total de partículas, los tiempos de colisión del sistema, así como el rango de velocidades iniciales  $(v_x, v_y, v_z)$  de dichas partículas, eligiendo que tipo de distribución tendrán inicialmente (gaussiana o uniforme). Los parámetros físicos de carga efectiva ( $Z_{eff}$ ) y campo eléctrico  $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$  también son definidos en este fichero.

Como prueba inicial del sistema, se realiza una simulación para distintos valores de carga efectiva ( $Z_{eff} = 0, 5, 15$ ) y campo eléctrico nulo para verificar que evolucionan a una distribución Maxwelliana independientemente de su carga efectiva (Fig. 3.5).

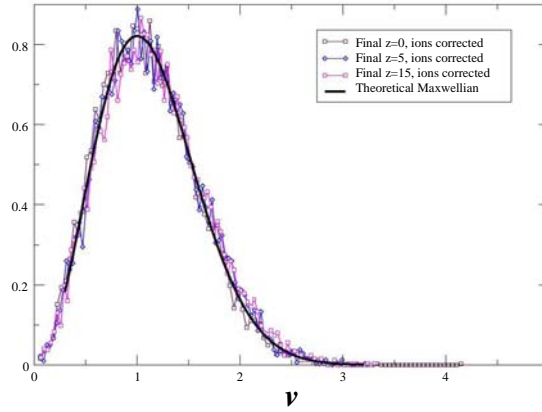


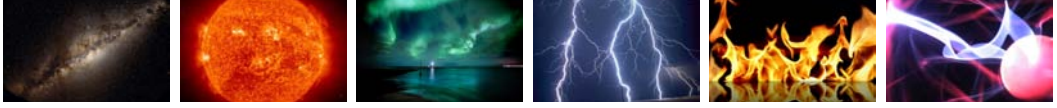
Figura 3.5: Simulación inicial para valores de carga efectiva  $Z_{eff} = 0, 5, 15$  y campo eléctrico nulo, en comparación con la maxwelliana teórica (línea negra).

Para que la distribución final de la simulación esté bien definida, el número de partículas necesarias será del orden de  $10^6$ , por lo que el tiempo de computación será muy elevado. Por este motivo el código fue paralelizado, utilizando librerías MPI, de forma que es posible escalar linealmente hasta 256 procesadores.



# 4

## Probabilidad runaway. Condiciones para la generación de electrones runaway



*The most important thing in life is to stop saying "I wish"  
and start saying "I will". Consider nothing impossible,  
then treat possibilities as probabilities*  
Charles Dickens, *David Copperfield*

Uno de los objetivos principales de la investigación sobre electrones runaway en tokamaks es determinar las condiciones para las que se producen y, de acuerdo con ello, establecer las mejores condiciones para suprimir o, al menos, minimizar su número en el plasma. Por este motivo, en este capítulo se establece un criterio de generación de electrones runaway basado en el análisis de su probabilidad en el espacio de velocidades.

### 4.1. Introducción

Como se explicó en el Capítulo 2, se puede obtener una aproximación a las condiciones para la generación runaway imponiendo que la fuerza de aceleración debida al campo eléctrico toroidal sea mayor que la fuerza de fricción debida a las colisiones con los electrones e iones del plasma

$$e E_{||} > m_e \frac{\langle \Delta v_{||} \rangle}{\Delta t} \quad (4.1)$$

( $||$  indica la dirección paralela al campo magnético, esencialmente toroidal). Para estimar el efecto de las colisiones sobre el electrón, se utiliza el coeficiente de fricción Ec. (3.17),

$$m_e \frac{\langle \Delta v_{||} \rangle}{\Delta t} = m_e \sum_{\beta} -\Gamma^{e/\beta} \frac{m_e + m_{\beta}}{m_{\beta} v_{T,\beta}^2} \psi(x_{\beta}) \frac{1}{v}, \quad (4.2)$$

siendo  $\Gamma^{e/\beta} \equiv n_\beta (e q_\beta)^2 \ln \Lambda / \varepsilon_0^2 m_e^2$ ,  $x_\beta \equiv v / \sqrt{2} v_{T,\beta}$ , y donde la suma se extiende sobre los electrones térmicos y las especies iónicas del plasma. Teniendo en cuenta que los electrones runaway son mucho más rápidos que los electrones e iones térmicos,  $x_\beta \equiv v / \sqrt{2} v_{T,\beta} \gg 1$ ,  $\psi(x_\beta) \approx 1 / (2 x_\beta^2)$ , y, por tanto,

$$m_e \frac{\langle \Delta v_{||} \rangle}{\Delta t} \approx \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e} \frac{1}{v^3} + \sum_{iones} \frac{n_\beta Z_\beta^4 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e} \frac{1}{v^3} = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda (2 + Z_{eff})}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e} \frac{1}{v^3}, \quad (4.3)$$

que, sustituyendo en Ec.(4.1), conduce a una velocidad crítica,

$$\frac{v_D}{v_{T,e}} = (2 + Z_{eff})^{1/2} \left( \frac{E_D}{E_{||}} \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

( $E_D$  es el campo Dreicer), conocida como *condición (o velocidad Dreicer)* para la generación runaway [9].

Sin embargo, esta aproximación incluye considerables simplificaciones. En primer lugar, se ha considerado solamente el movimiento en la dirección paralela al campo  $v \sim v_{||}$ , pero no se ha tenido en cuenta la dispersión (o *scattering*) colisional del electrón en dirección perpendicular al campo. La dinámica perpendicular, como veremos, tiene gran importancia, ya que, la energía ganada en dirección perpendicular debido a las colisiones reduce la pérdida neta de energía del electrón y, con ello, la fricción colisional en dirección paralela al campo,  $dv_{||}/dt \sim -v_{||}/v^3$ . Por otro lado, se ha evaluado solamente el efecto promedio de las colisiones sobre el electrón, pero no se ha considerado de forma autoconsistente el efecto estocástico de las colisiones coulombianas. De hecho, los estudios de dinámica runaway basados en la ecuación de Fokker-Planck [8, 11, 40, 41], indican que la función de distribución runaway adquiere un carácter fuertemente direccional cuando  $v_{||}/v_{T,e} \sim (E_D/E_{||})^{1/2}$ , lo que sugiere una velocidad crítica sustancialmente menor que la velocidad Dreicer.

En este Capítulo, con el fin de definir con rigor las condiciones para la generación runaway, usaremos la ecuación de Langevin para electrones runaway (3.64) establecida en el capítulo anterior, incluyendo tanto el efecto estocástico de las colisiones como la dinámica en el espacio de velocidades en dirección perpendicular al campo. Para ello, analizaremos en primer lugar la probabilidad runaway en el espacio de velocidades, lo que permitirá definir las condiciones para la generación de electrones runaway.

## 4.2. Probabilidad runaway. Condiciones para la generación de electrones runaway

La aproximación de partícula de Langevin resulta especialmente adecuada para determinar la probabilidad de que un electrón con velocidad inicial  $(v_{||}, v_{\perp})$  (consideramos que  $||, \perp$  indican las componentes de la velocidad del electrón en dirección paralela y perpendicular al campo, respectivamente) se convierta finalmente en un electrón runaway. El método para determinar dicha probabilidad,  $R(v_{||}, v_{\perp})$ , se basa en calcular usando la ecuación de Langevin (3.64) la trayectoria

en el espacio de velocidades de un número suficientemente grande de electrones (típicamente  $\sim 10^5 - 10^6$  partículas) con la misma velocidad inicial ( $v_{||}, v_{\perp}$ ) durante un intervalo de tiempo suficientemente grande (hasta  $\sim 10^3$  tiempos de colisión). La fracción de electrones que escapa (es decir, que no se termalizan) proporciona la *probabilidad runaway*  $R(v_{||}, v_{\perp})$ .

Dado que la mayor parte de los electrones en un campo eléctrico se mueven en la dirección de la fuerza eléctrica asociada (la dirección paralela al campo magnético en nuestro caso), podemos simplificar el análisis considerando en primer lugar la probabilidad runaway para electrones con velocidad inicial perpendicular al campo  $v_{\perp} = 0$ . La Fig. 4.1 muestra dicha probabilidad,  $R$ , como función de la velocidad inicial paralela,  $v_{||}$  ( $v_{||} > 0$  corresponde a la dirección de la fuerza eléctrica). La velocidad está normalizada a la velocidad térmica electrónica y el valor del campo eléctrico (normalizado) es  $\epsilon = E_{||}/E_D = 0,04$ . Los resultados se muestran para diferentes valores de  $Z_{eff} = 1, 3, 5, 10$ . Se puede observar que, en la dirección de la fuerza eléctrica ( $v_{||} > 0$ ), la probabilidad runaway es inicialmente cero pero, a partir de una cierta velocidad, la probabilidad aumenta de forma brusca a 1. Como era de esperar, la probabilidad runaway decrece al aumentar la carga iónica efectiva del plasma,  $Z_{eff}$ , ya que, en este caso, el efecto de las colisiones con los iones del plasma es mayor.

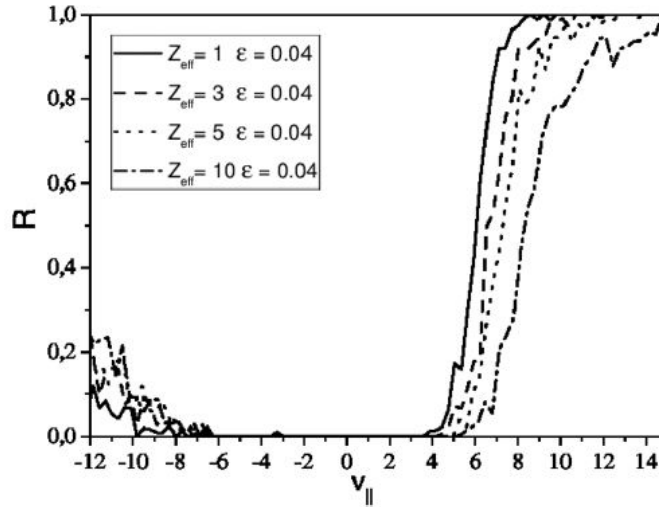


Figura 4.1: Probabilidad runaway  $R$  vs.  $v_{||}$  para  $v_{\perp} = 0$ ,  $\epsilon = 0,04$  y  $Z_{eff} = 1, 3, 5, 10$ .

Esta función de probabilidad,  $R(v_{||})$ , en la región  $v_{||} > 0$  ajusta bien a una función sigmoideal,

$$R(v_{||}) \simeq \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{v_{||} - v_r}{\Delta v_{||}}\right)}} \quad (4.5)$$

donde  $v_r$  y  $\Delta v_{||}$  son los parámetros del ajuste, y  $v_r$  representa la velocidad correspondiente a un 50 % de probabilidad runaway.

La Fig. 4.2 muestra, como ejemplo, el ajuste de  $R(v_{||})$  para  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$  a (4.5) para  $v_{||} > 0$ . Los parámetros del ajuste son:  $v_r = 4,86 \pm 0,01$  y  $\Delta v_{||} = 0,36 \pm 0,01$ .

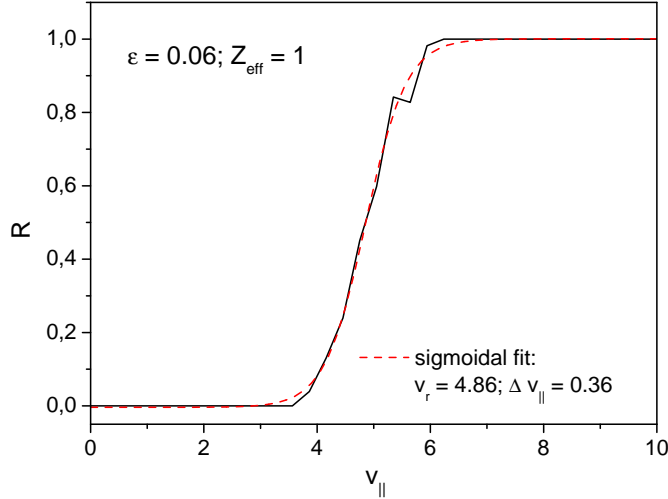


Figura 4.2: Probabilidad runaway  $R$  vs.  $v_{||}$  para  $v_{\perp} = 0$ ,  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$ . La línea discontinua corresponde a un ajuste de  $R(v_{||})$  a una función sigmoïdal para  $v_{||} > 0$ . Los parámetros del ajuste son:  $v_r = 4,86 \pm 0,01$ ,  $\Delta v_{||} = 0,36 \pm 0,01$ .

Otra observación interesante en relación a Fig.4.1, se refiere al hecho de que, incluso para  $v_{||} < 0$ , existe una región (aunque mucho menor) de probabilidad runaway no nula. Estos electrones viajan inicialmente en contra de la fuerza ejercida por el campo eléctrico: el campo decelera estos electrones y los efectos colisionales se vuelven importantes. Sin embargo, si su velocidad perpendicular,  $v_{\perp}$ , es todavía suficientemente grande cuando  $v_{||} = 0$ , estos electrones pueden ser acelerados por el campo eléctrico y llegar a convertirse finalmente en electrones runaway. Son los denominados *backward runaway electrons* [50]. Como señalaron Fisch y Karney [51], estos electrones podrían llegar a ser importantes durante la fase de formación de la corriente en un tokamak (*current ramp-up*) asistida por ondas de *lower hybrid*, ya que, absorben energía del campo eléctrico y, de este modo, pueden degradar la eficiencia de la fase de creación de la corriente.

Basados en este análisis, podemos introducir un criterio sencillo para la generación de electrones runaway. Así, podemos definir la *velocidad crítica*,  $v_r$ , para la generación de electrones runaway como la velocidad para la que la probabilidad runaway es igual al 50 %,  $R(v_r) \equiv 50\%$ . La Fig.4.3 ilustra la dependencia de  $v_r$  con los parámetros del plasma, el campo eléctrico normalizado (figura de la derecha) y  $Z_{eff}$  (figura de la izquierda). Las barras de error indican la anchura de la región runaway, obtenida usando la condición  $R(v_{||}) = 25\% - 75\%$ . Esta anchura es típicamente  $\sim 10\% v_r$ .

Un buen ajuste empírico a la velocidad crítica,  $v_r$ , así definida, para un rango de  $Z_{eff} = 1 - 10$  y  $\epsilon = 0,04 - 0,1$ , está dado por la expresión

$$v_r \simeq (2 + Z_{eff})^{0,23 \pm 0,01} \epsilon^{-0,475 \pm 0,005} \quad (4.6)$$

Como se puede ver, la dependencia de la velocidad  $v_r$  en la carga iónica  $Z_{eff}$  es mucho menor que en la condición Dreicer [Eq. (4.4)],  $v_r \sim (2 + Z_{eff})^{-1/2} v_D$ . De este modo, la consideración simultánea de las pérdidas colisionales de momento en la dirección paralela al campo y de la dispersión colisional en dirección perpendicular en presencia de un campo eléctrico toroidal da lugar a una relajación sustancial en las condiciones para la generación runaway en comparación con la velocidad Dreicer, en cuya estimación se ha tenido sólo en cuenta la dinámica en la dirección paralela,  $v_r \ll v_D$ .

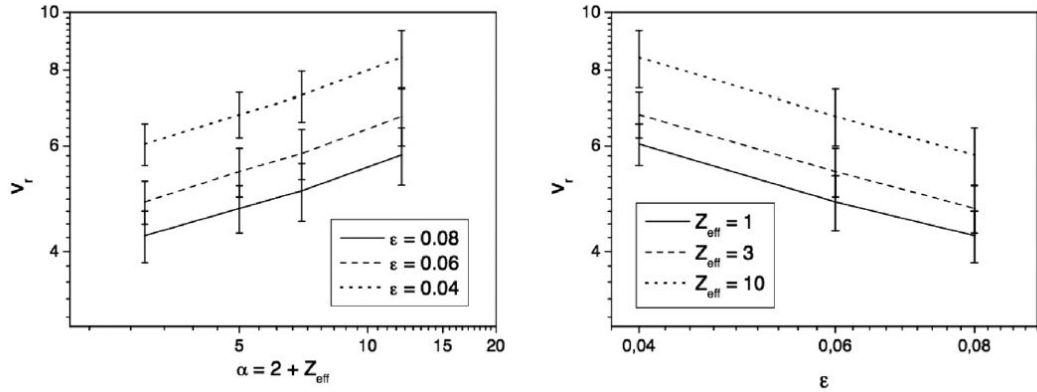


Figura 4.3: Velocidad crítica,  $v_r$ , para la generación runaway [ $R(v_r) \equiv 50\%$ ] vs.  $\alpha = 2 + Z_{eff}$  para ( $\epsilon = 0,04, 0,06, 0,08$ ) (izquierda) y  $Z_{eff} = 1, 3, 10$  (derecha). Las barras de error indican la anchura de la región runaway, definida por la condición  $R(v_{||}) = 25\% - 75\%$ .

El análisis anterior se refiere solamente a electrones runaway inicialmente producidos en la dirección del campo eléctrico ( $v_{\perp} = 0$ ). De forma más general, podemos considerar la probabilidad runaway en todo el espacio de velocidades,  $R(v_{||}, v_{\perp})$ . En la Fig. 4.4 se muestra como ejemplo el mapa de contorno de la probabilidad runaway,  $R(v_{||}, v_{\perp})$ , para  $\epsilon = 0,04$  y  $Z_{eff} = 1$ . Como se ve en la figura, el espacio de velocidades aparece claramente dividido en dos regiones: una región que podríamos llamar *región térmica* (en azul en la figura) en la que la mayor parte de los electrones serán termalizados, y la *región runaway* (en rojo) en la que la mayor parte de los electrones acaban convirtiéndose en electrones runaway.

Ambas regiones aparecen separadas por una línea (la línea continua en Fig. 4.4), que verifica la condición  $R(v_{||}, v_{\perp}) = 50\%$ , que constituye la frontera entre la región térmica y la región runaway, y a la que denominaremos la *separatriz runaway*,  $S_r$ . La separatrix runaway,  $S_r$ , define de este modo la condición para la generación de electrones runaway en el espacio de velocidades: electrones por encima de la separatrix,  $S_r$ , se convertirán en electrones runaway y la velocidad crítica,  $v_r$ , antes definida corresponde a la intersección de la separatrix runaway con el eje  $v_{||}$  en el espacio de velocidades.

Por supuesto,  $S_r$  sólo proporciona la línea de probabilidad  $R(v_{||}, v_{\perp}) = 50\%$ . En un sentido más amplio y de una forma más precisa, podríamos introducir como criterio para la generación runaway una región de anchura finita en el espacio de velocidades alrededor de la separatrix, delimitada por las líneas de probabilidad  $R \equiv 25\% - 75\%$  (las líneas discontinuas en Fig. 4.4). Esta región definiría de una manera más apropiada la transición entre la región térmica y la región runaway.

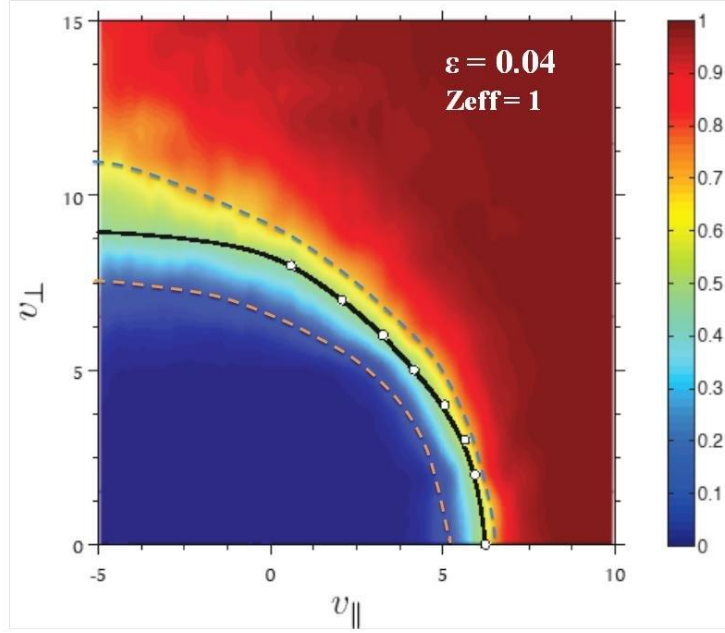


Figura 4.4: Mapa de contorno de la probabilidad runaway para  $\epsilon = 0,04$  y  $Z_{eff} = 1$ . La línea continua es la separatriz runaway,  $S_r$ . Las líneas discontinuas delimitan las región de probabilidad runaway  $R \equiv 25\% - 75\%$ .

Para terminar, es interesante hacer notar que los criterios (o condiciones) que acabamos de obtener para la generación de electrones runaway, tanto la velocidad crítica,  $v_r$ , como la separatriz,  $S_r$ , son consistentes con los resultados obtenidos a partir de una descripción de partícula test de la dinámica runaway en el espacio de velocidades [52]. La estimación de la velocidad crítica en dicho modelo,

$$v_r \sim (2 + Z_{eff})^{0,25} \epsilon^{-0,5},$$

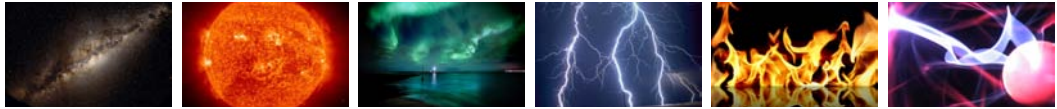
es muy próxima a que se ha obtenido aquí [Ec. (4.6)] y la separatriz,  $S_r$ , prácticamente coincide con la línea de probabilidad  $R(v_{||}, v_{\perp}) = 50\%$  antes definida mediante el método de Langevin.

Como se discutirá en el Capítulo 6, el modelo test para la dinámica runaway describe las trayectorias promedio de los electrones en el espacio de velocidades bajo la acción del campo eléctrico toroidal y de las colisiones coulombianas con los electrones e iones del plasma. En dicho modelo, se considera la dinámica de los electrones en la dirección paralela y perpendicular al campo, pero no se tiene en cuenta el efecto estocástico de las colisiones, que se trata en forma promedio. Debido a esto, y aunque la descripción test puede proporcionar estimaciones simples y correctas tanto de  $v_r$  como de  $S_r$ , no es capaz de ofrecer un interpretación precisa de estos resultados: que tanto  $v_r$  como  $S_r$  determinan las regiones de probabilidad runaway  $R = 50\%$  en el espacio de velocidades, y que la frontera entre la región térmica y la región runaway, debido a los efectos estocásticos de difusión colisional, debe definirse más que por un punto o una línea ( $v_r$  ó  $S_r$ ) en el espacio de velocidades, por una región de anchura finita en torno a los mismos (la región delimitada por las líneas discontinuas correspondientes a  $S_r$  en la Fig. 4.4).



# 5

## Función de distribución y Producción runaway



*I accept chaos, I'm not sure whether it accepts me.*

Bob Dylan

**E**n este capítulo, usaremos la ecuación de Langevin para obtener la función de distribución runaway e investigar la generación y formación de la población runaway en condiciones estacionarias. Una de las observaciones más importantes estará relacionada con el papel desempeñado por la dinámica perpendicular al campo magnético. Aunque la generación de electrones runaway depende principalmente de la aceleración de los electrones por el campo eléctrico en dirección paralela al campo magnético (esencialmente toroidal), y los electrones runaway son muy poco colisionales en comparación con los electrones térmicos, encontraremos que la dispersión colisional de los electrones runaway en dirección perpendicular al campo tiene un efecto determinante sobre la forma de la función de distribución y, con ello, sobre la producción de electrones runaway y la población final de electrones en la región runaway.

En la Sección 5.1 investigaremos la función de distribución runaway. Los efectos de la dinámica perpendicular se cuantificarán mediante la denominada *temperatura perpendicular*, dada por el segundo momento de la función de distribución en dirección perpendicular al campo, que describe el *ensanchamiento* de la función de distribución en dirección perpendicular debido al efecto de las colisiones. La *producción* de electrones runaway (es decir, el número de electrones runaway que se generan por unidad de tiempo bajo unas condiciones dadas) se estudiará en Sec. 5.2 y se discutirá el importante papel jugado por la dispersión colisional en dirección perpendicular.

## 5.1. Función de distribución runaway. Temperatura perpendicular

La función de distribución runaway se va a obtener usando la ecuación de Langevin para los electrones runaway. Los electrones se distribuyen inicialmente de forma aleatoria sobre una función de distribución maxwelliana y su trayectoria en el espacio de velocidades a partir del instante inicial se calcula mediante la ecuación de Langevin (3.64). La función de distribución en cada instante se obtiene mediante un método estadístico estándar, hasta que finalmente se alcanza el estado estacionario. Con el fin de poder alcanzar dicho estado estacionario, los electrones que exceden una cierta velocidad máxima (típicamente  $v_{max} = 25$ , normalizada a la velocidad térmica electrónica) se redistribuyen de nuevo en la maxwelliana.

La Fig. 5.1 muestra el mapa de contorno en estado estacionario para la función de distribución runaway en el espacio de velocidades,  $F(v_{||}, v_{\perp}) = 2\pi v_{\perp} f_e(v_{||}, v_{\perp})$ , para dos valores diferentes del campo eléctrico ( $\epsilon = 0,08, 0,1$ ) y de la carga iónica efectiva ( $Z_{eff} = 1, 5$ ). La separatriz runaway, descrita en el Capítulo 4, correspondiente al 50 % de probabilidad runaway, también se indica en todos los casos (línea negra continua).

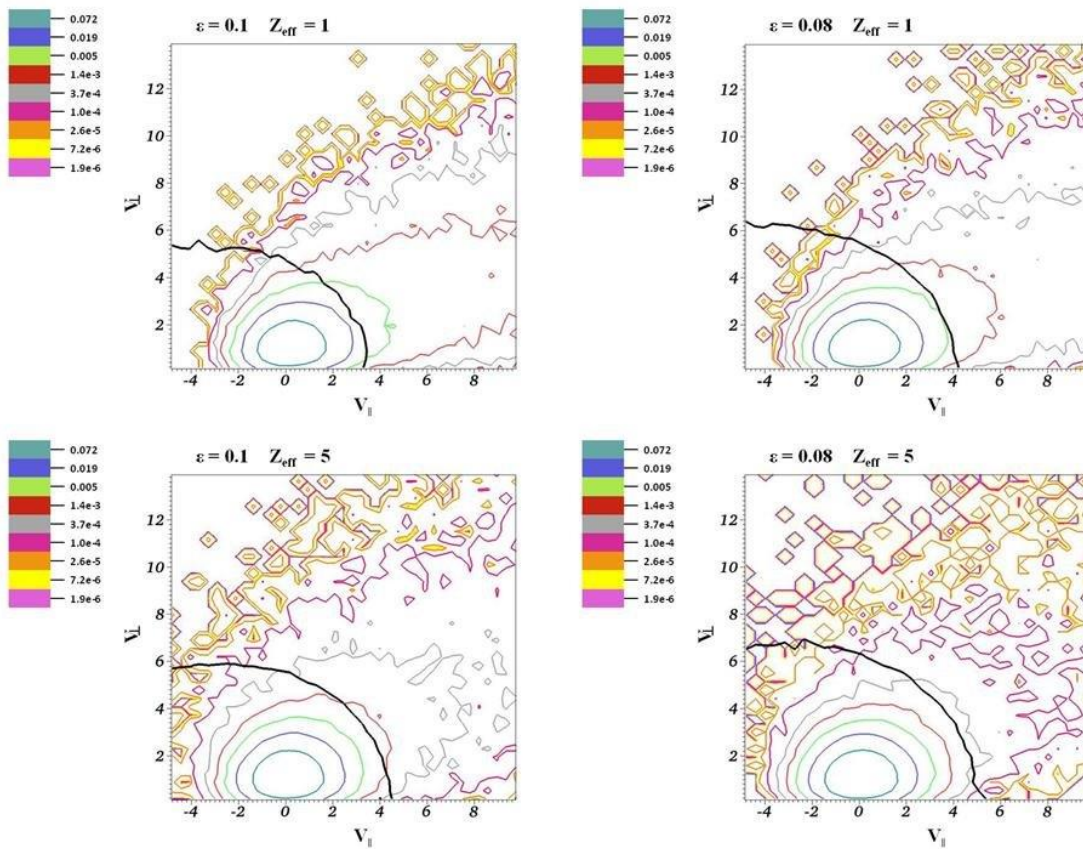


Figura 5.1: Mapa de contorno en estado estacionario para  $\ln F(v_{||}, v_{\perp})$  para  $\epsilon = 0,1, 0,08$  y  $Z_{eff} = 1, 5$ . La línea negra continua indica la separatriz runaway en cada caso.

Se puede observar que, en los casos menos colisionales (campo eléctrico grande y  $Z_{eff}$  pequeño) existe una fuerte anisotropía en la función de distribución en la dirección del campo eléctrico (dirección paralela) debido a la generación y aceleración de electrones runaway en dicha dirección. A medida que aumenta la colisionalidad del plasma (disminuyendo  $\epsilon$  y/o aumentando  $Z_{eff}$ ), la función de distribución se vuelve más isotrópica debido al efecto de termalización de las colisiones. Por otro lado, se puede observar también que cuanto más colisional es el plasma, la región térmica (debajo de la separatriz) aumenta y la magnitud de la función de distribución cerca de la separatriz disminuye, lo que indica que el número de electrones que, por difusión, puede cruzar la separatriz será menor y, por tanto, el número de electrones en la región runaway.

Fig.5.2 representa el mapa de contorno de  $R(v_{||}, v_{\perp}) \cdot F(v_{||}, v_{\perp})$  en la región térmica del espacio de velocidades (es decir, debajo de la separatriz runaway). El valor de  $R(v_{||}, v_{\perp}) \cdot F(v_{||}, v_{\perp})$  en dicha región proporciona información sobre la fracción de electrones en la región térmica que, finalmente, se convertirán en electrones runaway.

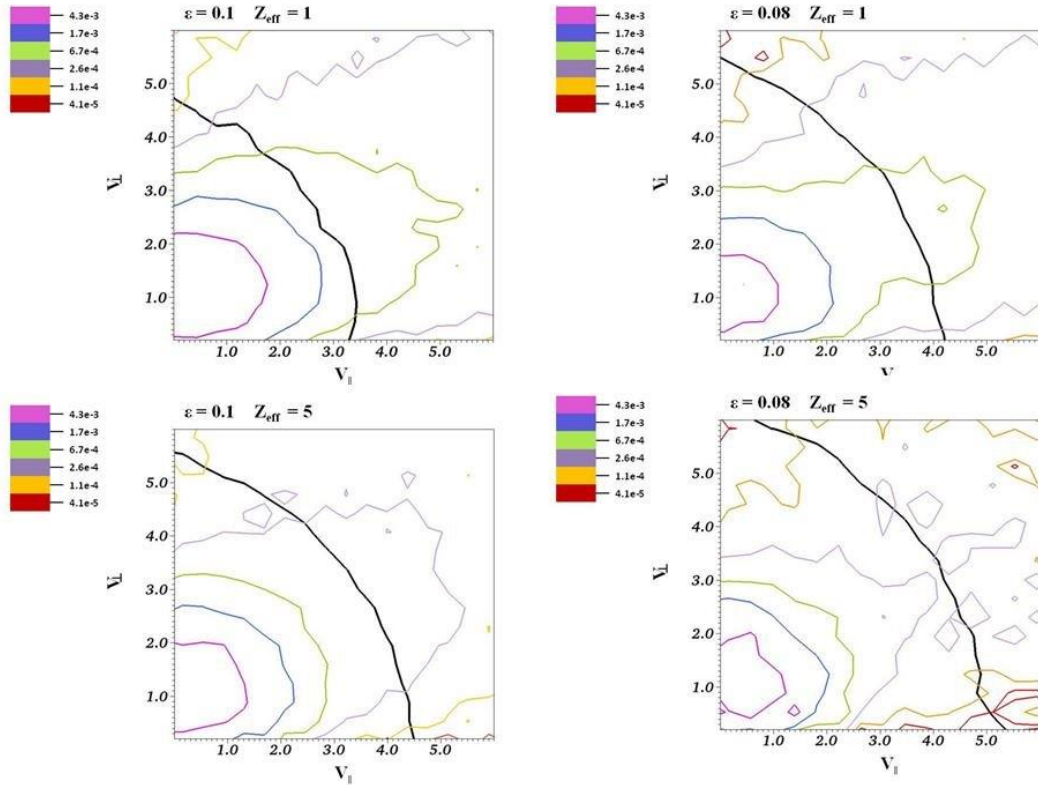


Figura 5.2: Mapa de contorno en estado estacionario de  $\ln R(v_{||}, v_{\perp}) \cdot F(v_{||}, v_{\perp})$  para las mismos parámetros del plasma que en Fig. 5.1. La línea negra continua indica la separatriz runaway en cada caso.

Resulta interesante notar que regiones lejanas de la separatriz, con una probabilidad runaway muy baja, pueden realizar una contribución importante. La distancia de estas regiones a la separatriz en el espacio de velocidades aumenta con la colisionalidad del plasma y, como consecuencia de ello, el camino que estos electrones deben recorrer por difusión en el espacio de velocidades para llegar a

convertirse en runaways es mayor, lo que lleva a una disminución en el número de electrones que cruzarán la separatriz por unidad de tiempo y, por tanto, a una disminución en la producción runaway.

Se puede extraer una información más clara y simple sobre la formación y las características de la población runaway analizando el primer y segundo momento en la velocidad perpendicular de  $f_e(v_{\parallel}, v_{\perp})$ . El primer momento,

$$F(v_{\parallel}) \equiv \overline{v_{\perp}} = 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp} f_e dv_{\perp}, \quad (5.1)$$

( $\overline{v_{\perp}}$  indica un valor promedio, donde  $f_e$  está normalizada a la densidad total de electrones) es la *función de distribución paralela*, que proporciona la densidad de electrones (normalizada) como función de la velocidad paralela,  $v_{\parallel}$ .

El segundo momento, normalizado a  $F(v_{\parallel})$ ,

$$T_{\perp}(v_{\parallel}) \equiv \frac{\overline{v_{\perp}^2}}{2F} = \frac{\int_0^{\infty} v_{\perp}^3 f_e dv_{\perp}}{2 \int_0^{\infty} v_{\perp} f_e dv_{\perp}}, \quad (5.2)$$

es la *temperatura perpendicular*, normalizada a la temperatura del plasma térmico ( $T_{\perp} = 1$  para una maxwelliana), igual a la energía perpendicular promedio de los electrones (como función de  $v_{\parallel}$ ), y que proporciona información sobre el ensanchamiento en dirección perpendicular de la función de distribución como resultado de la dispersión colisional.

Fig. 5.3 ilustra la formación de la población runaway [ $F(v_{\parallel})$  en la figura superior;  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  en la figura inferior] para un valor del campo eléctrico  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$ .  $F(v_{\parallel})$  y  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  se muestran en tres instantes diferentes: en el instante inicial ( $t\nu_e = 0$ ; línea continua), al cabo de 280 tiempos de colisión ( $t\nu_e = 280$ ; línea discontinua), y al cabo de 800 tiempos de colisión ( $t\nu_e = 800$ ), cuando se ha alcanzado el estado estacionario (línea de puntos).

En el instante inicial, la función de distribución se supone maxwelliana (función de distribución de los electrones térmicos) y  $T_{\perp} = 1$ . La generación y aceleración de electrones runaway por el campo eléctrico en la dirección toroidal (paralela al campo) da lugar a la formación de una región aplanada en  $F(v_{\parallel})$  (el *plateau* runaway) que comienza aproximadamente a la velocidad crítica,  $v_r$ . Sin embargo, el efecto del campo eléctrico no se restringe al flujo de electrones a través de la velocidad crítica y a la formación de una *cola* de electrones runaway en la función de distribución para  $v_{\parallel} > v_r$ .

Los electrones rápidos que difunden a través de la velocidad crítica,  $v_r$ , inicialmente con velocidad perpendicular pequeña (aproximadamente térmica) son dispersados colisionalmente por los electrones e iones del plasma en dirección perpendicular y, aunque los electrones rápidos son mucho menos colisionales que los electrones térmicos, la dispersión perpendicular conduce a una temperatura perpendicular en la región runaway considerablemente mayor que la temperatura del plasma térmico.

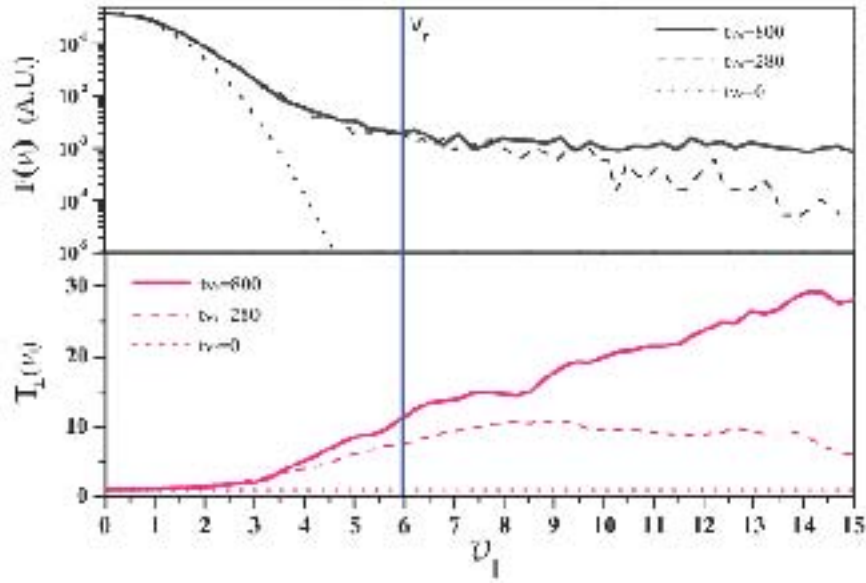


Figura 5.3:  $F(v_{\parallel})$  (figura superior) y  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  (figura inferior), para  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$ : (a)  $\nu_e = 0$  (función de distribución maxwelliana; línea continua); (b)  $\nu_e = 280$  (línea discontinua); (c)  $\nu_e = 800$  (estado estacionario; línea de puntos). La línea azul indica la velocidad crítica,  $v_r$ .

Como se explicó antes,  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  ilustra el ensanchamiento en dirección perpendicular de la función distribución runaway debido a las colisiones y  $T_{\perp} > 1$  en la región  $v_{\parallel} > v_r$  constituye de hecho una característica distintiva de los electrones rápidos. El incremento en el número de electrones debido al ensanchamiento perpendicular de la distribución ( $T_{\perp} > 1$ ) da lugar como resultado a un aumento en la magnitud del *plateau* runaway,  $F(v_{\parallel})$ , y, por tanto, de la producción runaway, como se discutirá en Sec. 5.2. Además, este efecto no se restringe sólo a la región de *plateau*,  $v_{\parallel} > v_r$ , sino que, debido a las colisiones, los electrones runaway son también dispersados hacia regiones con  $v_{\parallel} < v_r$ , lo que da lugar a un ensanchamiento perpendicular de la distribución ( $T_{\perp} > 1$ ) y a una desviación de la distribución de la maxwelliana incluso para  $v_{\parallel} < v_r$  (ver Fig. 5.3).

Fig. 5.4 muestra en más detalle  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  en estado estacionario calculada para  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$ . Se pueden distinguir dos regiones bien diferenciadas en  $T_{\perp}$  como función de  $v_{\parallel}$ . Para valores pequeños de  $v_{\parallel}$  (típicamente  $v_{\parallel} < \epsilon^{-1/2}$ ), la población de electrones es esencialmente térmica y  $T_{\perp}$  aumenta lentamente sobre su valor térmico,  $T_{\perp} \simeq 1$ . El comportamiento de  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  en esta región se puede describir analíticamente mediante la aproximación de Gurevich (línea de puntos en Fig. 5.4) [40],

$$T_{\perp}(v_{\parallel}) \simeq (1 - \epsilon v_{\parallel}^2)^{-1} \quad (5.3)$$

Para valores suficientemente grandes de  $v_{\parallel}$ , la función de distribución está dominada por las partículas rápidas, lo que lleva a un rápido aumento de la tempera-

tura perpendicular. La línea discontinua en Fig. 5.4 corresponde a una estimación de  $T_{\perp}(v_{\parallel})$ , basada en la descripción de partícula test de la dinámica runaway [39], que ajusta razonablemente bien los resultados numéricos para  $v_{\parallel} > v_r$ :

$$T_{\perp}(v_{\parallel}) \simeq \left( \frac{v_{\parallel}^2}{6} \right) \left[ -1 + \left( 1 + 12 \frac{T_{\infty}}{v_{\parallel}^2} \right)^{1/2} \right] \quad (5.4)$$

donde  $T_{\infty} \equiv \frac{1 + Z_{eff}}{2\epsilon} \ln(1 + \epsilon v_{\parallel}^2)$ .

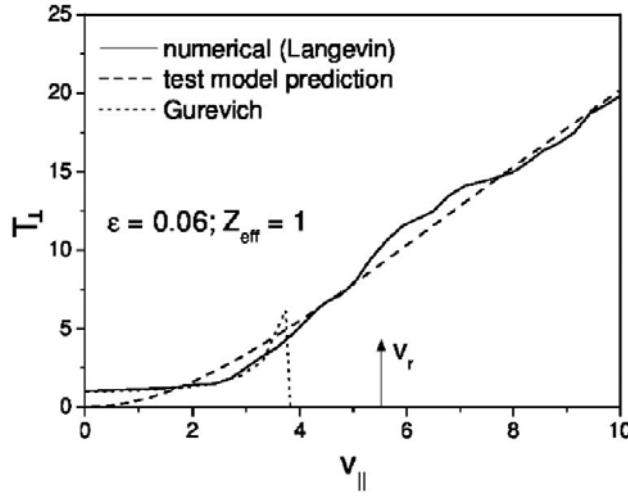


Figura 5.4: Comparación de  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  en estado estacionario, calculada numéricamente para  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$  (línea continua), con las aproximaciones analíticas de Gurevich (línea de puntos) y del modelo de partícula test (línea discontinua).

El efecto de las condiciones del plasma ( $\epsilon$  y  $Z_{eff}$ ) sobre la dinámica perpendicular ( $T_{\perp}$ ) se ilustra en la figura 5.5. En la figura de la izquierda, se compara  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  para  $Z_{eff} = 5$  y dos valores distintos del campo eléctrico,  $\epsilon = 0,06$  y  $0,1$ . Para el campo eléctrico más pequeño ( $\epsilon = 0,06$ ) el plasma es más colisional por lo que la condiciones para la generación de electrones runaway son más restrictivas ( $v_r \sim (2 + Z_{eff})^{0,25} \epsilon^{-0,5}$  es mayor) y, por tanto, la región térmica  $T_{\perp} \sim 1$  es más ancha. Al mismo tiempo, en la región runaway ( $v_{\parallel} > v_r$ ), la dispersión colisional es más intensa, lo que da lugar a una  $T_{\perp}$  mayor en esta región que en el caso menos colisional,  $\epsilon = 0,1$ .

La figura de la derecha muestra el efecto de un aumento de la carga iónica efectiva ( $Z_{eff} = 1, 5$ ) para el mismo valor del campo eléctrico,  $\epsilon = 0,08$ . Como antes, el valor de la temperatura perpendicular en la región runaway ( $v_{\parallel} > v_r$ ) es mayor en el caso más colisional ( $Z_{eff} = 5$ ). Sin embargo, la region térmica ( $T_{\perp} \sim 1$ ) no difiere prácticamente para  $Z_{eff} = 1$  y  $5$ , lo que es consistente con la débil dependencia de  $v_r$  con  $Z_{eff}$  ( $v_r \sim (2 + Z_{eff})^{0,25} \epsilon^{-0,5}$ ).

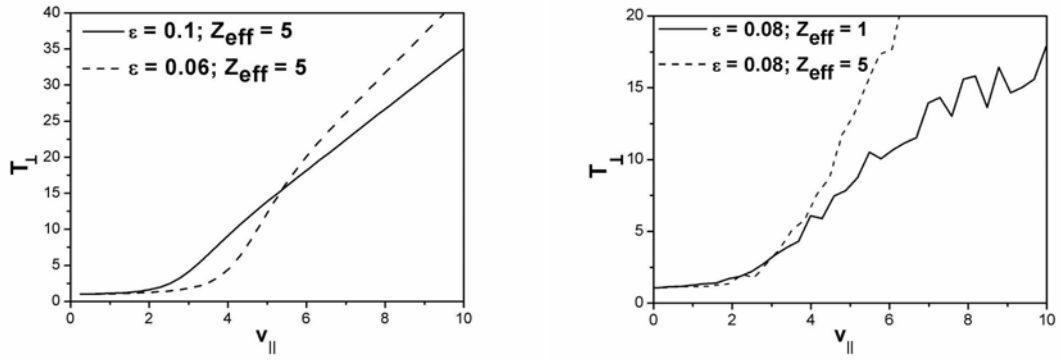


Figura 5.5: *Figura de la izquierda:  $T_{\perp}$  vs.  $v_{\parallel}$  para  $\epsilon = 0,1$  y  $0,06$ , y  $Z_{eff} = 5$ ; Figura de la derecha:  $T_{\perp}(v_{\parallel})$  para  $\epsilon = 0,08$  y  $Z_{eff} = 1, 5$ .*

## 5.2. Producción runaway. Efecto de la dinámica perpendicular

Como se explicó en el Capítulo 2, uno de los objetivos principales de la investigación sobre electrones runaway en plasmas tokamak es determinar el número de electrones runaway que se generarán bajo unas condiciones dadas y, en particular, durante una disrupción. En esta sección, nos ocuparemos de uno de los mecanismos principales de generación de electrones runaway: la *generación Dreicer* o *mecanismo primario* de generación runaway (Sección 2.2.1), debido a la difusión de electrones en el espacio de velocidades a través de la velocidad crítica,  $v_r$  [9].

Fig. 5.6 muestra la producción Dreicer (normalizada) de electrones runaway,  $\lambda \equiv (dn_r/dt)/n_e\nu_e$ , obtenida a partir del método de Langevin determinando el número de electrones que entran en la región runaway por unidad de tiempo, para las mismas condiciones que Fig. 5.3 ( $\epsilon = 0,06$ ,  $Z_{eff} = 1$ ). La línea discontinua corresponde a la estimación obtenida a partir de una aproximación analítica [Ec.(2.8)] a la solución de la ecuación Fokker-Planck en estado estacionario [12],

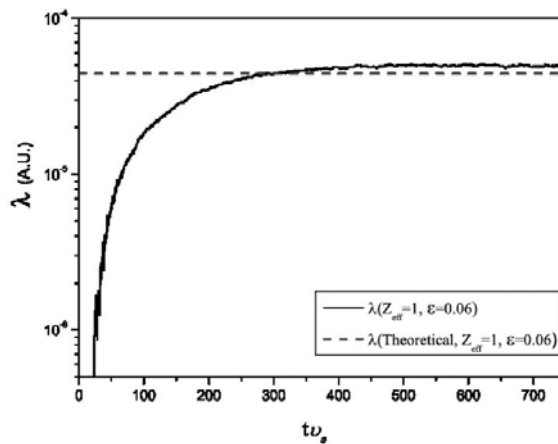


Figura 5.6: *Evolución de la producción Dreicer (normalizada),  $\lambda$ , calculada usando el método de Langevin, para  $\epsilon = 0,06$  y  $Z_{eff} = 1$ . La línea discontinua es la estimación de  $\lambda$  basada en la solución de la ecuación de Fokker-Planck en estado estacionario [12].*

La comparación entre el método de Langevin y de Fokker-Planck se ilustra en la figura 5.7, en la que se muestran las estimaciones obtenidas para  $\lambda$  en estado estacionario mediante ambos métodos. Los resultados, como se puede apreciar en la figura, son consistentes.

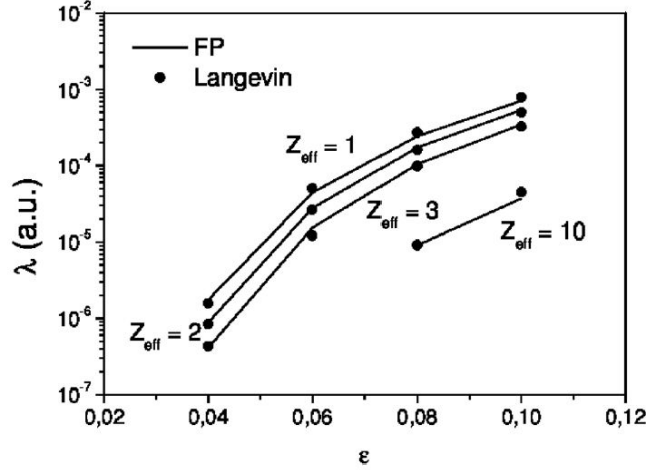


Figura 5.7: Comparación entre la producción (normalizada) de electrones runaway,  $\lambda$ , en estado estacionario calculada usando las aproximaciones de Langevin (círculos) y de Fokker-Planck (líneas continuas) [12].

Un aspecto importante relativo a la producción Dreicer de electrones runaway, en relación con la discusión que se ha llevado a cabo en la sección anterior sobre las características de la función de distribución runaway en estado estacionario, es el que se refiere al papel desempeñado por la dinámica perpendicular al campo. Como dijimos antes, la dispersión colisional perpendicular al campo juega un papel importante en la formación del *plateau* runaway. La dispersión colisional ensancha la función de distribución en la dirección perpendicular al campo magnético ( $T_{\perp}(v_{\parallel}) > 1$ ) aumentando el número de electrones en la región de *plateau*,  $F(v_{\parallel})$ , y, por lo tanto, la tasa de producción runaway. Es posible obtener una estimación cuantitativa del efecto de la dinámica perpendicular sobre la generación Dreicer usando la aproximación de Gurevich, basada en la ecuación de Fokker-Planck, para el flujo de electrones runaway en el espacio de velocidades en estado estacionario [40, 53].

Partiremos de la ecuación de Fokker-Planck 3.36 para los electrones runaway, en coordenadas cilíndricas  $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ ,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = -\text{div } \vec{S} = - \left[ \frac{\partial S_{\parallel}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} (v_{\perp} S_{\perp}) \right] \quad (5.5)$$

donde  $\vec{S}$  es el flujo de electrones en el espacio de velocidades, y  $S_{\parallel}$ ,  $S_{\perp}$ , los flujos en las direcciones paralela y perpendicular, respectivamente. Considerando, como se explicó en el Capítulo 3, sólo las colisiones con los electrones e iones térmicos, y usando el *límite de alta velocidad* en el fin de linealizar el operador de Fokker-Planck, los flujos paralelo y perpendicular se pueden simplificar [39]:



$$S_{||} \simeq \frac{eE_{||}}{m_e} f_e - \nu_e v_{T,e}^3 \left[ \frac{v_{T,e}^2 v_{||}}{v^4} \left( \frac{\partial f_e}{\partial v} + \frac{v}{v_{T,e}^2} f_e \right) - \frac{1 + Z_{eff}}{2} \frac{v_{\perp}^2}{v^4} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] \quad (5.6)$$

$$S_{\perp} \simeq \nu_e v_{T,e}^3 \left[ \frac{v_{T,e}^2 v_{\perp}}{v^4} \left( \frac{\partial f_e}{\partial v} + \frac{v}{v_{T,e}^2} f_e \right) - \frac{1 + Z_{eff}}{2} \frac{v_{||} v_{\perp}}{v^4} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] \quad (5.7)$$

La ecuación (5.5) se puede reescribir en forma adimensional como la ecuación de Langevin en Sec 3.3 ( $\tau \equiv \nu_e t$ ;  $v$ ,  $v_{||}$ ,  $v_{\perp}$  normalizados a  $v_{T,e}$ ), lo que conduce a,

$$\frac{\partial f_e}{\partial \tau} = - \left[ \frac{\partial S_{||}}{\partial v_{||}} + \frac{1}{\partial v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} (v_{\perp} S_{\perp}) \right] \quad (5.8)$$

donde

$$S_{||} \simeq \epsilon f_e - \left[ \frac{v_{||}}{v^4} \left( \frac{\partial f_e}{\partial v} + v f_e \right) + \frac{1 + Z_{eff}}{2} \frac{v_{\perp}^2}{v^4} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] \quad (5.9)$$

$$S_{\perp} \simeq \frac{v_{\perp}}{v^4} \left( \frac{\partial f_e}{\partial v} + v f_e \right) - \frac{1 + Z_{eff}}{2} \frac{v_{||} v_{\perp}}{v^4} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \quad (5.10)$$

( $\epsilon \equiv E_{||}/E_D$ ).

Como en Ref. [40], nos centraremos en la función de distribución paralela,  $F(v_{||}) = 2\pi \int_0^{\infty} v_{\perp} f_e dv_{\perp}$ . Multiplicando Ec. (5.8) por  $v_{\perp}$  e integrando sobre  $v_{\perp}$ , suponiendo que, en promedio,  $v_{\perp} \ll v_{||}$ , y despreciando términos del orden  $v_{\perp}^2/v_{||}^2$ , se obtienen la ecuación unidimensional,

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = - \frac{\partial S_0}{\partial v_{||}}, \quad (5.11)$$

donde  $S_0$  es el flujo total (normalizado a  $\nu_e$ ) de electrones a través del plano  $v_{||} \equiv \text{constante}$ ,

$$S_0 \simeq \epsilon F - \left[ \left( 1 + \frac{1 + Z_{eff}}{2} \overline{v_{\perp}^2} \right) \frac{1}{v_{||}^3} \frac{\partial F}{\partial v_{||}} + \frac{2 + Z_{eff}}{v_{||}^2} F \right], \quad (5.12)$$

y  $\overline{v_{\perp}^2}$  es la velocidad cuadrática media en dirección perpendicular al campo,

$$\overline{v_{\perp}^2} = \frac{\int_0^{\infty} v_{\perp}^3 f_e dv_{\perp}}{\int_0^{\infty} v_{\perp} f_e dv_{\perp}} = 2T_{\perp}(v_{||}) \quad (5.13)$$

En condiciones estacionarias,  $\partial F/\partial \tau = -\partial S_0/\partial v_{||} = 0$ , y  $S_0$  es constante, proporcionando la producción de electrones runaway en estado estacionario. En tal caso, Ec. (5.12) constituye una ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{dF}{dv_{||}} - v_{||} \frac{\epsilon v_{||}^2 - (2 + Z_{eff})}{1 + (1 + Z_{eff})(\overline{v_{\perp}^2}/2)} F = - \frac{v_{||}^3}{1 + (1 + Z_{eff})(\overline{v_{\perp}^2}/2)} \quad (5.14)$$

cuya solución es

$$F = \left[ c - S_0 \int_0^{v_{\parallel}} \frac{u^3}{1 + (\alpha - 1) \frac{v_{\perp}^2}{2}} \exp \left( - \int_0^u u' \frac{\epsilon u'^2 - \alpha}{1 + (\alpha - 1) \frac{v_{\perp}^2}{2}} du' \right) du \right] \times \exp \left( - \int_0^{v_{\parallel}} u \frac{\epsilon u^2 - \alpha}{1 + (\alpha - 1) \frac{v_{\perp}^2}{2}} du \right) \quad (5.15)$$

con  $\alpha = 2 + Z_{eff}$ ;  $c \equiv F(0) = n_e / \sqrt{2\pi}$ .

Una condición de contorno apropiada para  $F(v_{\parallel})$ , de Ec. (5.12), es que  $F(+\infty) = S_0/\epsilon$ , que, junto con Ec. (5.15), lleva a

$$S_0 = c \left[ \int_0^{\infty} \frac{u^3}{1 + (\alpha - 1) \frac{v_{\perp}^2}{2}} \exp \left( - \int_0^u u' \frac{\epsilon u'^2 - \alpha}{1 + (\alpha - 1) \frac{v_{\perp}^2}{2}} du' \right) du \right]^{-1} \quad (5.16)$$

y, por tanto, la producción runaway estará dada por

$$\frac{dn_r}{dt} = \nu_e S_0 = \frac{n_e \nu_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^{\infty} \frac{u^3}{1 + (\alpha - 1) T_{\perp}} \exp \left( - \int_0^u \frac{u'(\epsilon u'^2 - \alpha)}{1 + (\alpha - 1) T_{\perp}} du' \right) du \right]^{-1} \quad (5.17)$$

donde  $c \equiv F(0) = n_e / \sqrt{2\pi}$ ;  $T_{\perp} = \overline{v_{\perp}^2}/2$ .

La ecuación (5.17) ilustra el efecto de la dinámica perpendicular sobre la generación de electrones runaway a través de la dependencia en la temperatura perpendicular,  $T_{\perp}(v_{\parallel})$ . Una estimación simple de este efecto se puede obtener suponiendo  $T_{\perp}$  constante. En ese caso, las integraciones en la ecuación (5.17) se puede realizar analíticamente, dando lugar a

$$\frac{dn_r}{dt} = \nu_e S_0 = \frac{n_e \nu_e}{\sqrt{2\pi}} \frac{\epsilon}{1 + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\pi A}{\epsilon}}} \exp \left( - \frac{A \alpha^2}{4\epsilon} \right) \quad (5.18)$$

con  $A \equiv [1 + (\alpha - 1) T_{\perp}]^{-1}$ .

Como ejemplo, en Fig. 5.8, se muestra la producción runaway (normalizada),  $\lambda = (dn_r/dt)/n_e \nu_e$ , calculada usando Ec. (5.18) como función de  $T_{\perp}$ , para  $\epsilon = 0,08$  y  $Z_{eff} = 1$  ( $T_{\perp} = 1$  corresponde a una distribución térmica Maxwelliana en dirección perpendicular, en la que se desprecia el efecto de la dinámica perpendicular). En la figura, se aprecia un aumento considerable en la producción de electrones runaway (típicamente de varios órdenes de magnitud) como consecuencia del ensanchamiento perpendicular de la función de distribución runaway.

El efecto de la dinámica perpendicular se ilustra de forma más clara al comparar la producción runaway calculada incluyendo tanto la dinámica paralela como

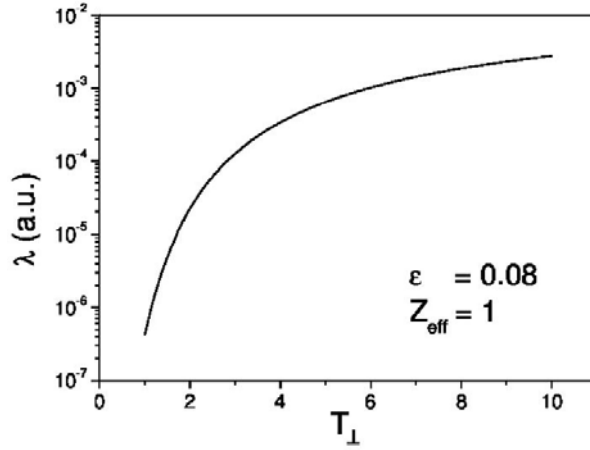


Figura 5.8: Producción runaway (normalizada) como función de  $T_{\perp}$ , para  $\epsilon = 0,08$  y  $Z_{\text{eff}} = 1$ .

perpendicular al campo, usando la aproximación de Langevin o de Fokker-Planck,  $\lambda_{2D}$  (2D: modelos bidimensionales), con la producción calculada considerando solamente la dinámica en la dirección paralela,  $\lambda_{1D}$ , (1D: modelo unidimensional, en el que se supone una distribución térmica Maxwelliana en dirección perpendicular, es decir,  $T_{\text{perp}} = 1$  en Ec. (5.18)). Como ejemplo, Fig. 5.9 muestra  $\lambda_{2D}/\lambda_{1D}$  como función de  $Z_{\text{eff}}$  para dos valores del campo eléctrico,  $\epsilon = 0,06$  y  $\epsilon = 0,08$ . Se puede observar que la producción runaway, no solamente aumenta en varios órdenes de magnitud debido a efectos 2D (es decir, al incluir la dinámica perpendicular de los electrones), sino que el efecto es sustancialmente mayor en los plasmas más colisionales ( $Z_{\text{eff}}$  grande y/o  $\epsilon$  pequeño), en los que la dispersión colisional de los electrones rápidos y, por tanto, el ensanchamiento en dirección perpendicular de la población runaway es mayor.

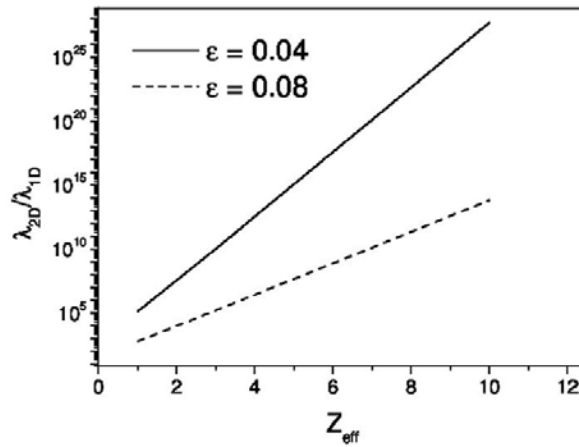


Figura 5.9: Razón de la producción runaway calculada en la aproximación de Langevin o Fokker-Planck 2D,  $\lambda_{2D}$ , a la producción runaway calculada en la aproximación 1D ( $T_{\perp} = 1$ ),  $\lambda_{1D}$ , como función de  $Z_{\text{eff}}$  (línea continua:  $\epsilon = 0,06$ ; línea discontinua:  $\epsilon = 0,08$ ).

Estos resultados indican que, aunque la producción runaway es menor cuando  $Z_{eff}$  aumenta o el campo eléctrico disminuye debido a la disminución de la fuerza neta (fuerza eléctrica menos fuerza de fricción colisional) sobre el electrón en dirección paralela al campo, el aumento de la población runaway en dirección perpendicular debido a la dispersión colisional puede contrarrestar en gran medida este efecto, aumentando significativamente la producción runaway sobre los valores que cabría esperar considerando únicamente la dinámica paralela. Esto se ilustra en Fig. 5.10, en la que se comparan las predicciones 1D (línea continua) y 2D (línea discontinua) para la razón de la producción runaway para  $Z_{eff} = 1$  y  $Z_{eff} = 3$ ,  $\lambda_{Z=1}/\lambda_{Z=3}$ , como función de  $\epsilon$ . Se puede observar que, debido al efecto de la dinámica perpendicular, para los valores más pequeños del campo eléctrico en la figura ( $\epsilon \sim 0,04$ ), esta razón puede llegar a disminuir desde valores de  $\sim 10^5$  en el modelo unidimensional a  $\sim 4$  en el modelo completo 2D.

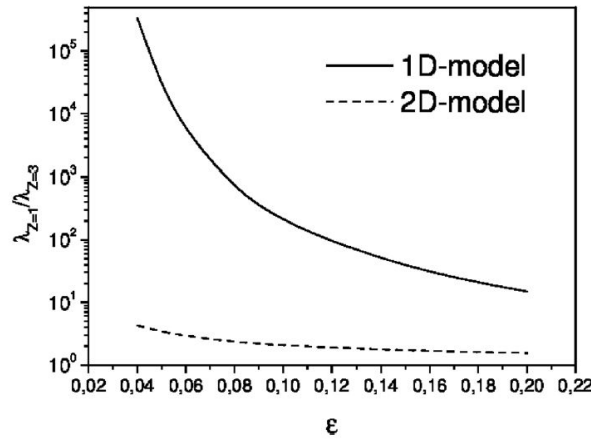


Figura 5.10: Razón de la producción runaway para  $Z_{eff} = 1$  y  $Z_{eff} = 3$  como función del campo eléctrico,  $\epsilon$ , predicha por los modelos 1D (línea continua) y 2D (línea discontinua).

## Parte III

### Límites de energía para electrones runaway en plasmas tokamak



# 6

## Modelo de partícula test para electrones runaway



*If you want to find the secrets of the Universe,  
think in terms of energy, frequency and vibration*  
Nikola Tesla

Los electrones runaway, una vez generados por encima de la velocidad crítica, dado que la fuerza eléctrica es mayor que la fuerza de fricción colisional, y ésta decrece con la energía del electrón, se acelerarán de forma continua bajo la acción del campo eléctrico toroidal, pudiendo alcanzar energías relativistas, de hasta decenas o cientos de MeVs. El daño que estos electrones pueden ocasionar sobre las estructuras del dispositivo, en caso de interaccionar con las mismas, dependerá tanto de su número como de su energía. Mientras que en los capítulos anteriores (4 y 5) nos hemos ocupado de la generación y formación de la población runaway, en estos capítulos (6 y 7) nos centraremos en la máxima energía que los electrones pueden alcanzar bajo unas condiciones dadas del plasma, lo que permitirá obtener pistas sobre posibles métodos que puedan ayudar a controlar y minimizar la energía de los electrones runaway.

En principio, este análisis requeriría resolver la ecuación cinética relativista de Fokker-Planck para los electrones runaway, incluyendo los mecanismos básicos que determinan la energía final de los electrones runaway: (1) la aceleración debida al campo eléctrico; (2) las colisiones con los electrones e iones del plasma, y (3) las pérdidas de energía debidas a la radiación sincrotrón, es decir, las pérdidas de energía asociadas a la trayectoria curva que sigue el electrón en el campo magnético del tokamak, que aumentan de forma importante (y, por tanto, no pueden despreciarse) cuando la energía del electrón se hace suficientemente grande. No obstante, este tratamiento se puede simplificar de forma significativa teniendo en

cuenta que, para electrones de alta energía, la difusión colisional asociada al efecto estocástico de las colisiones se reduce de forma notable, lo que permite, a la hora de estimar la energía de los electrones, sustituir el tratamiento de Fokker-Planck por un modelo simple, conocido como *modelo de partícula test*, en el que se calculan las trayectorias promedio de los electrones runaway en el espacio de momentos [52, 54].

En este capítulo revisaremos el modelo test para la dinámica de electrones runaway relativistas en el espacio de momentos, siguiendo Ref. [15], y presentaremos algunos de sus resultados más importantes relativos a las generación y a la energía de los electrones runaway. En el Capítulo 7, extenderemos este modelo para analizar el papel que la radiación de *bremssstrahlung* puede desempeñar como mecanismo de control de la energía runaway, en particular durante experimentos de mitigación y control de disrupciones mediante inyección masiva de impurezas de alta  $Z$  [18, 19].

## 6.1. Descripción del modelo

En esta sección presentaremos el modelo de partícula test que se va a utilizar para estudiar la dinámica de un electrón test relativista en el espacio de momentos, y en el que se incluirán la aceleración debida al campo eléctrico toroidal, las colisiones con las partículas térmicas del plasma, y las pérdidas de energía debidas a la radiación sincrotrón [15].

El punto de partida para obtener las ecuaciones de partícula test es la ecuación de Fokker-Planck relativista en el límite de alta velocidad [8, 55], incluyendo las pérdidas por radiación sincrotrón:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} = & -eE_{\parallel} \left[ \mu \frac{\partial f_e}{\partial p} + \frac{(1 - \mu^2)}{p} \frac{\partial f_e}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (F_S f_e) \\ & + \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e}{4\pi \epsilon_0^2} \left\{ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (\gamma f_e) + \frac{(1 + Z_{eff})\gamma}{2p^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f_e}{\partial \nu} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde  $p$  es el momento total del electrón,  $p_{\parallel}$  el momento en la dirección paralela,  $\mu = p_{\parallel}/p$  es el coseno del ángulo *pitch* del electrón,  $\gamma$  el factor gamma relativista,  $\gamma^2 = 1 + p^2/(m_e c^2)^2$ , y  $F_S$  es la *fuerza de reacción debida a la radiación*, que supondremos paralela a la velocidad del electrón [22].

Siguiendo el método empleado por Fussman en Ref. [54], las ecuaciones para la trayectoria promedio del electrón en el espacio de momentos se obtienen tomando los momentos apropiados de Ec. (6.1) sobre la función de distribución de una partícula test,

$$f_e(p, \mu) = \delta(p - p_0) \delta(\mu - \mu_0) / 2\pi p_0^2 \quad (6.2)$$

Así, la ecuación para la evolución temporal del valor promedio de  $\mu$ ,  $\langle \mu \rangle$ , se puede obtener multiplicando Ec. (6.1) por  $\mu$  e integrando sobre todo el espacio de momentos, obteniéndose



$$\frac{d\langle\mu\rangle}{dt} = eE_{\parallel} \frac{1 - \mu^2}{p} - \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e}{4\pi\epsilon_0^2} \gamma (Z_{eff} + 1) \frac{\mu}{p^3} \quad (6.3)$$

y, de forma similar,

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = eE_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{p} - \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{\gamma^2}{p^2} - F_S \quad (6.4)$$

en donde se ha omitido el subíndice 0.

Estrictamente, debido al efecto de difusión en el espacio de momentos asociado a las colisiones con los electrones e iones del plasma, la trayectoria verdadera del electrón se ensanchará alrededor de la trayectoria promedio descrita por Ecs. (6.3) y (6.4), pero, para partículas supratérmicas como los electrones runaway, y cuanto mayor sea su energía, más exacta será la aproximación  $\langle\mu\rangle \equiv \mu$  y  $\langle p \rangle \equiv p$ .

Combinando Ecs. (6.3) y (6.4), se obtiene la ecuación para  $p_{\parallel}$ ,

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = eE_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{p} - \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e}{4\pi\epsilon_0^2} \gamma (Z_{eff} + 1 + \gamma) \frac{p_{\parallel}}{p^3} - F_S \frac{p_{\parallel}}{p} \quad (6.5)$$

que, junto con la ecuación (6.4) para el momento total del electrón,

$$\frac{dp}{dt} = eE_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{p} - \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{\gamma^2}{p^2} - F_S \quad (6.6)$$

constituirán las ecuaciones que usaremos a partir de ahora para describir la dinámica de un electrón test en el espacio de momentos. En estas ecuaciones, el primer término corresponde a la aceleración debida al campo eléctrico toroidal,  $E_{\parallel}$  (fuerza eléctrica,  $F_e = eE_{\parallel}$ ), el segundo incluye el efecto promedio de las colisiones con las partículas del plasma (electrones e iones), y el tercero representa el efecto de las pérdidas de energía por radiación sincrotrón en términos de la fuerza de deceleración  $F_S$ .

La radiación sincrotrón constituye uno de los mecanismos más importantes que limitan la máxima energía que pueden alcanzar los electrones runaway. La fuerza de deceleración asociada,  $F_S$ , rigurosamente, debería calcularse usando la estimación de Abraham-Lorentz [56] pero, debido a su complicada dependencia de  $\ddot{\vec{v}}$ , usaremos en su lugar, como se indicó antes, una aproximación en la que la fuerza asociada a la radiación se supone paralela a la velocidad del electrón [22] y dada por:

$$\vec{F}_S = P_{rad} \frac{\vec{v}}{v^2} \quad (6.7)$$

donde  $P_{rad}$  es la potencia radiada por el electrón [57],

$$P_{rad} = \frac{2}{3} r_e m_e c^3 \left( \frac{v}{c} \right)^3 \gamma^4 \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \quad (6.8)$$

con lo cual, la fuerza  $F_S$  debida a la radiación toma la forma

$$F_S = \frac{2}{3} r_e m_e c^2 \left( \frac{v}{c} \right)^3 \gamma^4 \left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \quad (6.9)$$

En estas expresiones,  $r_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2)$  es el radio clásico del electrón, y  $\langle \frac{1}{R^2} \rangle$  representa el inverso del cuadrado del radio de curvatura de la trayectoria del electrón promediado sobre la órbita de Larmor del electrón [58],

$$\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle = \frac{1}{R_0^2} \left[ \cos^6 \theta + \cos^2 \theta \sin^4 \theta + \cos^4 \theta \sin^2 \theta \left( \frac{5}{2} + \frac{r_g^2}{8 R_0^2} \right) \right] + \frac{1}{r_g^2} \sin^4 \theta \quad (6.10)$$

( $R_0$  es el radio mayor del plasma, y  $r_g \equiv p_\perp / e B_0$  es el radio de Larmor del electrón, donde  $p_\perp$  es el momento del electrón perpendicular al campo y  $B_0$  el campo magnético toroidal).

Recordemos que la órbita de un electrón en un tokamak se puede considerar la superposición o suma de dos movimientos: en primer lugar, el movimiento del centro guía a lo largo de la línea de campo magnético (en un tokamak, esencialmente una órbita circular de radio igual al radio mayor del plasma  $R_0$ ) y, por otro, la (*órbita de Larmor*), es decir, el movimiento de giro del electrón alrededor de la línea de campo. Estos dos movimientos contribuyen al radio de curvatura del electrón. El primer término en Ec. (6.10) está principalmente determinado por el movimiento del centro guía, mientras que el segundo está dominado por el movimiento de Larmor. Dado que  $r_g \ll R_0$ , el segundo término será dominante para ángulos *pitch* finitos (y, así, el radio de curvatura estará determinado por el movimiento de giro del electrón). Solamente cuando  $\theta \sim 0$ , la contribución debida al movimiento del centro guía no será despreciable. Teniendo en cuenta estas consideraciones, podemos usar para  $\langle 1/R^2 \rangle$  la siguiente expresión simplificada [15]:

$$\left\langle \frac{1}{R^2} \right\rangle \simeq \frac{1}{R_0^2} + \frac{\sin^4 \theta}{r_g^2} \quad (6.11)$$

## 6.2. Trayectorias del electrón en el espacio de momentos

Resulta conveniente reescribir las ecuaciones (6.5) y (6.6) en forma normalizada,

$$\frac{dq_{||}}{d\tau} = D - \gamma(\alpha + \gamma) \frac{q_{||}}{q^3} - \left( F_{gc} + F_{gy} \frac{q_{\perp}^2}{q^4} \right) \gamma^4 \left( \frac{v}{c} \right)^3 \frac{q_{||}}{q}, \quad (6.12)$$

$$\frac{dq}{d\tau} = D \frac{q_{||}}{q} - \frac{\gamma^2}{q^2} \left( F_{gc} + F_{gy} \frac{q_{\perp}^2}{q^4} \right) \gamma^4 \left( \frac{v}{c} \right)^3, \quad (6.13)$$

donde se han usado las siguientes normalizaciones:

- $q = q/m_e c$  para el momento del electrón;
- $\tau = \nu_r t$  para el tiempo, donde  $\nu_r = n_e e^4 \ln \Lambda / 4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^3$  es la frecuencia de colisión de electrones relativistas;

- $D = E_{||}/E_c$  para el campo eléctrico, donde  $E_c$  es el campo eléctrico crítico para la generación de electrones runaway, definido en el Capítulo 2,  $E_c = n_e e^3 \ln \Lambda / 4\pi \epsilon_0^2 m_e c^2$ .

El parámetro  $\alpha$  se define como  $\alpha = 1 + Z_{eff}$ , y  $F_{gc}$ ,  $F_{gy}$  son dos parámetros que describen las contribuciones asociadas a las pérdidas por radiación sincrotrón:

- $F_{gc} = \frac{2\epsilon_0 B_0^2}{3n_e \ln \Lambda m_e}$  corresponde a la contribución asociada al movimiento del centro guía;
- $F_{gy} = F_{gy} \left( \frac{m_e c}{e B_0 R_0} \right)^2$  describe la contribución asociada al movimiento de giro del electrón alrededor de la línea de campo.

A partir de Ecs. (6.12) y (6.13), se puede deducir la expresión para la ecuación de evolución del momento en dirección perpendicular al campo magnético teniendo en cuenta que  $q^2 = q_{||}^2 + q_{\perp}^2$ ,

$$q_{\perp} \frac{dq_{\perp}}{d\tau} = \frac{1}{q} \left[ \gamma(\alpha + \gamma) \frac{q_{||}^2}{q^2} - \gamma^2 - \left( F_{gc} + F_{gy} \frac{q_{\perp}^2}{q^4} \right) \gamma^4 \left( \frac{v}{c} \right)^3 q_{\perp}^2 \right] \quad (6.14)$$

De esta forma quedan definidas las dos ecuaciones que describen la trayectoria del electrón test en el espacio de momentos ( $q_{||}$ ,  $q_{\perp}^2$ ). Fig. 6.1 muestra como ejemplo estas trayectorias para unos parámetros (normalizados) del plasma:  $D = 4,4$ ,  $\alpha = 4$ ,  $F_{gy} = 0,65$ , y  $F_{gc} = 2,3 \times 10^{-8}$  (estos parámetros son típicos del tokamak JET durante la fase de formación de la corriente o *current ramp-up* en descargas en que se ha observado la generación de electrones runaway:  $E_{||} \sim 0,4$  V/m;  $R_0 \sim 3$  m;  $B_0 \sim 3$  T;  $Z_{eff} \sim 3$ ;  $n_e \sim 2 \times 10^{19}$  m<sup>-3</sup>). Las ecuaciones de evolución para  $q_{||}$  y  $q_{\perp}^2$  se caracterizan por la presencia en el espacio de momentos de dos puntos singulares: un punto de silla  $P_1$  y un foco estable  $P_2$ , indicados en la figura 6.1.

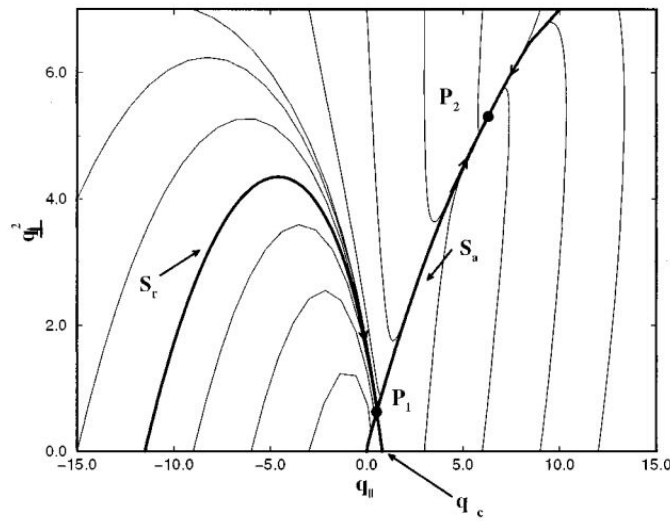


Figura 6.1: *Espacio de fases de Ecs. (6.12) y (6.14) para  $D = 4,4$ ,  $F_{gy} = 0,65$ , y  $F_{gc} = 2,3 \times 10^{-8}$ .  $P_1$  es el punto de silla,  $P_2$  es el foco estable,  $S_r$  y  $S_a$  las separatrices, y  $q_c$  el momento crítico (normalizado) para la generación de electrones runaway.*

La relación entre el campo eléctrico normalizado,  $D$ , y los puntos singulares,  $D(\gamma_s)$ , se puede obtener de forma simple teniendo en cuenta que  $P_1$  y  $P_2$  se encuentran en la intersección de los contornos  $\dot{q}_{\parallel} = 0$  y  $\dot{q}_{\perp} = 0$  (ó  $\dot{q} = 0$ ). Así, de  $\dot{q} = 0$ , utilizando la ecuación (6.13), se obtiene:

$$D = \frac{\gamma_s^2}{\cos\theta_s(\gamma_s^2 - 1)} \left( 1 + F_{gy} \frac{(\gamma_s^2 - 1)^{3/2}}{\gamma_s} \sin^2\theta_s + F_{gc} \frac{(\gamma_s^2 - 1)^{5/2}}{\gamma_s} \right) \quad (6.15)$$

y de  $\dot{q}_{\perp} = 0$ , usando Ec. (6.14), se puede deducir la expresión para  $\cos\theta_s$ ,

$$\begin{aligned} \cos^2\theta_s = 1 + \frac{F_{gc}(\gamma_s^2 - 1)}{2F_{gy}} + \frac{\alpha + \gamma_s}{2F_{gy}(\gamma_s^2 - 1)^{3/2}} \\ \times \left\{ 1 - \left[ \frac{4\alpha F_{gy}(\gamma_s^2 - 1)^{3/2}}{(\alpha + \gamma_s)^2} + \left( 1 + \frac{F_{gc}(\gamma_s^2 - 1)^{5/2}}{\alpha + \gamma_s} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

En estas ecuaciones  $\gamma_s$  representa el factor gamma relativista en los puntos singulares<sup>1</sup>, y  $\theta_s$  el ángulo *pitch*. La figura 6.2 muestra, para los mismos parámetros del plasma que Fig. 6.1, la relación (6.15) entre  $D$  y la energía  $\gamma_s$  en los puntos singulares. Para cada valor de  $D$  se tienen dos valores de  $\gamma_s$ , correspondientes a los puntos singulares  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente: la rama I en Fig. 6.2 corresponde al punto de silla,  $P_1$ , mientras que la rama II representa al foco estable,  $P_2$ . Como se explicará luego, los puntos singulares tienen un significado físico bien definido: el punto de silla (rama I) proporciona una estimación de la energía crítica para la generación de electrones runaway, mientras que el foco estable (rama II) proporciona la energía límite de los electrones runaway generados.

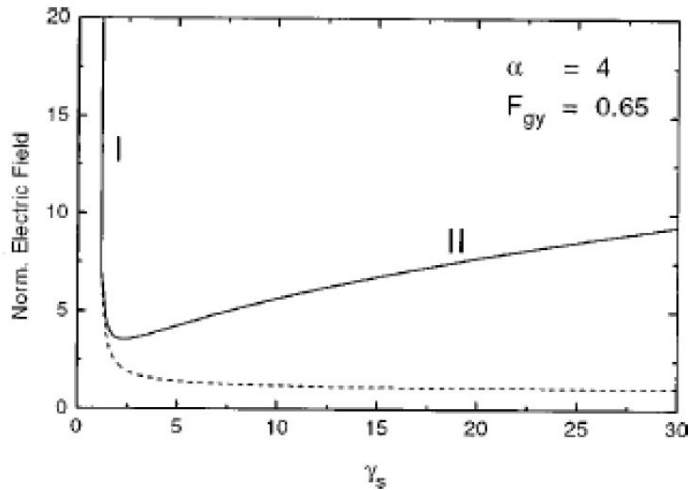


Figura 6.2: *Campo eléctrico normalizado vs.  $\gamma_s$  en los puntos singulares obtenido incluyendo las pérdidas de energía asociadas a la radiación sincrotrón (línea continua); y despreciando la potencia radiada por el electrón (línea discontinua).*

<sup>1</sup>Al que frecuentemente nos referimos como la energía del electrón, dada la relación inmediata que existe entre  $\gamma$  y la energía,  $E = (\gamma - 1)m_e c^2$ .

Las trayectorias límite en Fig. 6.1 que pasan a través de los puntos singulares  $P_1$  y  $P_2$  son las separatrices,  $S_r$  y  $S_a$ . La separatriz  $S_r$  divide el espacio de momentos en dos regiones. La región situada fuera de la separatriz  $S_r$  constituye la *región runaway*: todos los electrones que inicialmente se encuentren fuera de la separatriz  $S_r$  acaban moviéndose sobre la separatriz  $S_a$  hasta alcanzar el foco estable  $P_2$ , mientras que los electrones situados inicialmente dentro de  $S_r$  acaban colapsando en el origen, convirtiéndose en electrones térmicos. La separatriz  $S_r$  coincide en el límite no relativista con la línea de probabilidad runaway  $R = 50\%$  definida en el Capítulo 4 mediante el método de Langevin. No obstante, el método de partícula test sólo permite definir de forma promedio la "frontera" de la región runaway. Como consecuencia del efecto estocástico de las colisiones, como se explicó en el Capítulo 4, dicha "frontera" en el espacio de momentos tiene una cierta anchura que se puede estimar mediante la aproximación de Langevin.

Finalmente, conviene hacer notar que la presencia del foco estable,  $P_2$ , en el espacio de momentos es consecuencia de haber considerado en el modelo las pérdidas por radiación. Los electrones runaway, como consecuencia, no son continuamente acelerados por el campo eléctrico sino que alcanzan una energía máxima cuando la potencia radiada iguala a la energía ganada del campo eléctrico. Este balance de energía tiene lugar en el foco estable,  $P_2$ . Si no se hubieran considerado las pérdidas por radiación, las ecuaciones test tendrían sólo un punto singular en el espacio de momentos, que correspondería al punto de silla  $P_1$ . La relación entre este punto y el campo eléctrico normalizado,  $D$ , se obtendría nuevamente usando  $\dot{q}_{\parallel} = 0$ ,  $q_{\perp} = 0$ , con  $F_S = 0$  en las ecuaciones de evolución del momento, lo que conduce a la relación:

$$D = \frac{\gamma_s^{3/2}(\alpha + \gamma_s)^{1/2}}{(\gamma_s - 1)} \quad (6.17)$$

Esta relación se muestra también en la figura 6.2 (línea discontinua). En este caso, sólo existe una rama, la correspondiente al punto de silla  $P_1$ , que se extiende hasta el infinito en  $\gamma_s$ .

### 6.3. Generación de electrones runaway

La descripción de partícula test permite obtener estimaciones simples de cantidades significativas relacionadas con la generación de electrones runaway [52]. Estas estimaciones, aunque no tienen en cuenta la difusión en el espacio de momentos debida a las colisiones coulombianas, se aproximan bastante bien a las obtenidas mediante métodos más rigurosos y complejos como la aproximación de Langevin o la ecuación de Fokker-Planck para la función de distribución runaway.

#### 6.3.1. Campo eléctrico crítico

Como se vio en el Capítulo 2, la consideración de efectos relativistas en la dinámica runaway conduce a un *campo eléctrico mínimo*,  $E_c = n_e e^3 \ln \Lambda / 4\pi \epsilon_0^2 m_e c^2$ , por debajo del cual no se pueden generar electrones runaway [8]. En forma normalizada, para  $D < D_c = 1$  no existirán electrones runaway.

Este resultado se obtuvo teniendo en cuenta el efecto del campo eléctrico y de las colisiones con los electrones e iones del plasma. Sin embargo, la consideración de las pérdidas por radiación sincrotrón lleva a un aumento del campo eléctrico crítico,  $D_c$ , que se puede cuantificar de forma simple usando el modelo de partícula test [15]. Esto se ilustra en la figura 6.2, en la que se representa  $D$  como función de  $\gamma_s$ . Un mínimo local separa los puntos de silla (rama I) de los focos estables (rama II) en el espacio de momentos. Cuando  $D$  disminuye, el valor de  $\gamma_s$  en el punto de silla aumenta y su valor en el foco estable disminuye hasta que ambos coinciden en el mínimo de  $D$  versus  $\gamma_s$ , por debajo del cual ya no existen electrones runaway. De este modo, el campo eléctrico mínimo,  $D_c$ , para la generación de electrones runaway estará dado por el mínimo de  $D$  vs.  $\gamma_s$  y se podrá determinar usando la condición  $dD/d\gamma_s = 0$ . Fig. 6.3 (a) muestra el campo eléctrico crítico,  $D_c$ , estimado de este modo como función del parámetro de radiación  $F_{gy}$ . Debido a la radiación sincrotrón, el campo crítico es mayor que uno ( $D_c > 1$ ), aumentando dicho efecto con el parámetro de radiación  $F_{gy}$ . De esta manera, el incremento en las pérdidas de momento y energía asociado con la radiación lleva a condiciones más restrictivas para la generación de electrones runaway, aumentando el valor del campo eléctrico crítico sobre el estimado en ausencia de radiación,  $D_c > 1$ . Este incremento en el valor del campo crítico,  $E_c$ , asociado al efecto de la radiación sincrotrón ha sido recientemente verificado experimentalmente en el tokamak FTU [59].

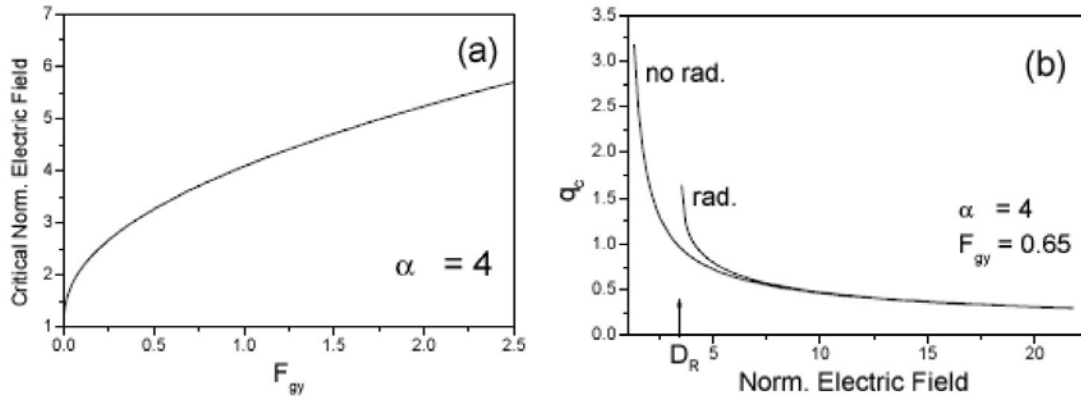


Figura 6.3: (a) Campo eléctrico crítico,  $D_c$ , para la generación de electrones runaway como función del parámetro de radiación  $F_{gy}$ ; (b) Comparación entre el momento crítico  $q_c$  calculado para  $F_{gy} = 0$  (no rad., es decir, sin incluir el efecto de la radiación sincrotrón), y para  $F_{gy} = 0,65$  (rad., es decir, considerando los efectos de la radiación). El campo eléctrico crítico para  $F_{gy} = 0,65$  se indica mediante una flecha.

### 6.3.2. Momento crítico

La separatriz  $S_r$  en el espacio de momentos separa las regiones en las que la generación de electrones runaway puede (o no) tener lugar (Fig. 6.1). Sin embargo, es posible obtener un criterio más simple para la generación runaway si se tiene en cuenta que la mayor parte de los electrones deben estar "concentrados" en la dirección de la fuerza debida al campo eléctrico (es decir, paralela al campo). Así, la condición  $q_{||} > q_c$ , con  $q_c$  dado por la intersección de la separatriz  $S_r$  con el eje

positivo de  $q_{\parallel}$  puede usarse como criterio para que un electrón se pueda convertir en runaway. El momento  $q_c$  puede definirse de este modo como el *momento crítico* para la generación de electrones runaway. Este momento crítico,  $q_c$ , lleva en el límite no relativista a la velocidad crítica,  $v_r$ , definida en el Capítulo 4.

Como se demostró en [15], el valor del momento del electrón en el punto de silla  $P_1$  proporciona una buena estimación del momento crítico  $q_c$ . Fig. 6.3 (b) muestra  $q_c$  como función del campo eléctrico normalizado para las mismas condiciones del plasma que Fig. 6.1. En la figura, se compara el momento crítico  $q_c$  calculado teniendo en cuenta el efecto de la radiación ( $F_{gy} > 0$ ) con el calculado suponiendo  $F_{gy} = 0$ . La radiación sincrotrón lleva a un aumento de  $q_c$ , siendo este efecto mayor cerca del campo crítico,  $D_c$ .

## 6.4. Energía límite

Como se ha explicado antes, la radiación sincrotrón da lugar en el modelo test a la aparición de un foco estable  $P_2$  en el espacio de momentos. La energía del electrón en  $P_2$  proporciona una buena estimación de la máxima energía que los electrones runaway pueden alcanzar. La relación entre esta energía límite,  $\gamma_l$ , y el campo eléctrico (normalizado) está dada por la rama II de la ecuación 6.15, y se muestra en la figura 6.4 (línea continua).

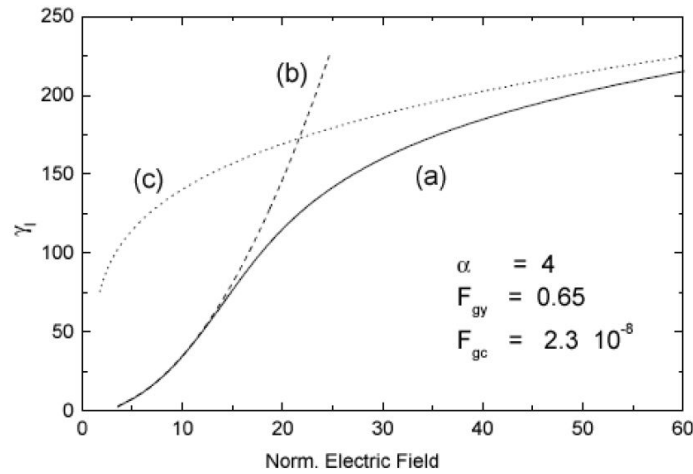


Figura 6.4: (a) Límite de energía runaway,  $\gamma_l$ , como función del campo eléctrico normalizado (línea continua); (b) Estimación de  $\gamma_l$  obtenida considerando sólo el efecto de la radiación asociada con el movimiento de giro del electrón alrededor de la línea de campo (línea discontinua); (c) Energía límite,  $\gamma_l$ , estimada teniendo sólo en cuenta el movimiento del centro guía del electrón (línea de puntos).

Es posible obtener una expresión analítica explícita para  $\gamma_l$  como función de los parámetros del plasma, válida para un rango muy amplio de valores del campo eléctrico, suponiendo que  $\gamma_l^2 \gg 1$  y  $\gamma_l \gg \alpha/2D$ , lo que lleva a la expresión [15],

$$\gamma_l = \frac{1}{2} \left\{ -B^{1/2} + \left[ -B + \frac{2A}{B^{1/2}} \right]^{1/2} \right\} \quad (6.18)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= [27a^2 + (729a^4 + 6912b^3)^{1/2}]^{1/3} \\ B &= -\frac{4 \cdot 2^{1/3}b}{A} + \frac{A}{3 \cdot 2^{1/3}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

y  $a = \alpha F_{gy}/DF_{gc}$  y  $b = (D - 1)/F_{gc}$ .

Es interesante hacer notar la existencia de dos regímenes para  $\gamma_l$  dependiendo de cuál de los dos mecanismos que contribuyen a la radiación sincrotrón (radiación asociada al movimiento de giro alrededor de las líneas de campo o asociada al movimiento del centro guía) sea dominante. Su importancia relativa se ilustra también en Fig. 6.4, en la que la energía límite runaway,  $\gamma_l$ , se compara con la energía calculada considerando solamente pérdidas por radiación asociadas al movimiento de giro del electrón en su órbita de Larmor [línea (b)] o con el movimiento del electrón en órbitas toroidales en el tokamak [línea (c)]. Se puede ver en la figura que la radiación asociada al movimiento de giro alrededor de las líneas de campo es dominante para campos eléctricos pequeños, ya que, en este caso las colisiones con las partículas del plasma pueden aumentar el ángulo *pitch* del electrón lo suficiente como para dar una contribución significativa a la radiación sincrotrón. En este régimen, la expresión para  $\gamma_l$  se simplifica a [15],

$$\gamma_l \approx \frac{D(D - 1)}{\alpha F_{gy}} \quad (6.20)$$

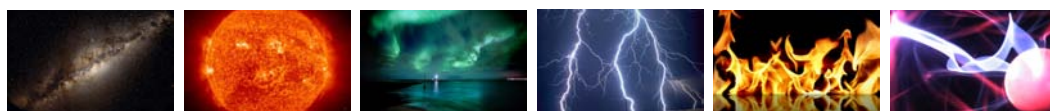
Sin embargo, para campos eléctricos intensos, debido a la fuerte aceleración en dirección toroidal, el ángulo *pitch* del electrón es casi cero, y las pérdidas por radiación están dominadas por el movimiento del centro guía del electrón en dirección toroidal del centro guía. La energía límite del electrón se puede aproximar en este régimen como [15]

$$\gamma_l \approx \left( \frac{D - 1}{F_{gc}} \right)^{1/4} \quad (6.21)$$



# 7

## Radiación de Bremsstrahlung



*No snowflake in an avalanche, ever feels responsible*  
Voltaire

La *radiación de bremsstrahlung* o *radiación de frenado* es la radiación que emite un electrón al ser desviado de su trayectoria como consecuencia de las colisiones con los electrones e iones del plasma. En condiciones normales en un plasma tokamak, la radiación de *bremsstrahlung* debida a los electrones runaway es despreciable en comparación con la radiación sincrotrón. Esto se debe principalmente a que la radiación sincrotrón aumenta con la energía del electrón de forma mucho más rápida que la radiación de *bremsstrahlung* ( $\gamma^4$  frente a un aumento esencialmente lineal en el caso de la radiación de frenado [56]).

En los últimos años, se están realizando un gran número de experimentos dedicados al control de las interrupciones basados en la inyección de impurezas de alta  $Z$  (*MGI: Massive Gas injection*), cuyo objetivo es disipar buena parte de la energía del plasma en forma de radiación, reduciendo las cargas de calor sobre las estructuras del sistema e induciendo una caída rápida de la corriente (*fast plasma shutdown*) que mitiga los efectos negativos asociados al desplazamiento vertical del plasma durante la interrupción corrientes y fuerzas magnéticas inducidas en las estructuras del sistema. [18, 19, 60]. En estos experimentos, la densidad del plasma y la carga iónica aumentan de forma significativa y, con ello, la radiación de *bremsstrahlung* de los electrones runaway que, en estas condiciones, sí puede constituir un mecanismo importante de pérdida de energía de los electrones [61, 62].

En este capítulo se analizará el papel que la radiación de *bremsstrahlung* puede desempeñar en la dinámica de los electrones runaway, utilizando para ello el modelo de partícula test presentado en el Capítulo 6, y centrándonos en las condiciones de alta densidad y  $Z$  características de los experimentos de control de interrupciones

mediante inyección de impurezas que acabamos de citar. En particular, analizaremos su efecto sobre la energía de los electrones runaway y estudiaremos las condiciones que deben darse para que la radiación de *bremsstrahlung* desempeñe un papel principal como mecanismo de disipación de energía. Dedicaremos una atención especial al caso de electrones runaway generados durante disrupciones.

## 7.1. Ecuaciones del modelo de partícula test

Para analizar la dinámica de los electrones runaway teniendo en cuenta las pérdidas de energía asociadas a la radiación de frenado, usaremos el modelo de partícula test presentado en el capítulo anterior, incluyendo un término que describa los efectos de la radiación de *bremsstrahlung*. Dichos efectos, como en el caso de la radiación sincrotrón, se describirán mediante una fuerza de fricción en la dirección de movimiento del electrón, de la forma [56],

$$F_B = \frac{4}{137} n_e (Z + 1) m_e c^2 \gamma r_e^2 \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right). \quad (7.1)$$

Las ecuaciones de partícula test resultantes serán:

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = eE_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{p} - \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e}{4\pi \epsilon_0^2} \gamma (Z + 1 + \gamma) \frac{p_{\parallel}}{p^3} - (F_S + F_B) \frac{p_{\parallel}}{p} \quad (7.2)$$

$$\frac{dp}{dt} = eE_{\parallel} - \frac{n_e e^4 \ln \Lambda m_e \gamma^2}{4\pi \epsilon_0^2} \frac{1}{p^2} - (F_S + F_B) \frac{p_{\parallel}}{p} \quad (7.3)$$

Usando la misma normalización que en el Capítulo 6, las ecuaciones normalizadas de partícula test para el momento paralelo y total del electrón serán

$$\begin{aligned} \frac{dq_{\parallel}}{d\tau} = & D - \gamma(\alpha + \gamma) \frac{q_{\parallel}}{q^3} - \left( F_{gc} + F_{gy} \frac{q_{\perp}^2}{q} \right) \gamma^4 \left( \frac{v}{c} \right)^3 \frac{q_{\parallel}}{q} \\ & - F_{br} \alpha \gamma \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right) \frac{q_{\parallel}}{q}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} = & D \frac{q_{\parallel}}{q} - \frac{\gamma^2}{q^2} - \left( F_{gc} + F_{gy} \frac{q_{\perp}^2}{q} \right) \gamma^4 \left( \frac{v}{c} \right)^3 \\ & - F_{br} \alpha \gamma \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde  $F_{br} = (137\pi \ln \Lambda)^{-1}$  es un parámetro adimensional asociado a la contribución de la radiación de *bremsstrahlung*.

El primer término en las ecuaciones (7.4) y (7.5) corresponde a la aceleración debida al campo eléctrico toroidal, el segundo incluye los efectos de las colisiones con las partículas del plasma, y los dos últimos términos establecen las pérdidas por radiación, el primero asociado a la radiación sincrotrón y el segundo a la radiación de frenado.

La ecuación para el momento perpendicular,  $q_\perp$ , se deduce a partir de dichas ecuaciones, usando que  $q^2 = q_\parallel^2 + q_\perp^2$ , y obteniéndose

$$q_\perp \frac{dq_\perp}{d\tau} = \frac{1}{q} \left[ \gamma(\alpha + \gamma) \frac{q_\parallel^2}{q^2} - \gamma^2 - \left( F_{gc} + F_{gy} \frac{q_\perp^2}{q^4} \right) \gamma^4 \left( \frac{v}{c} \right)^3 q_\perp^2 \right] - F_{br} \alpha \gamma \left( \ln(2\gamma) - \frac{1}{3} \right) \frac{q_\perp^2}{q} \quad (7.6)$$

Es importante en este punto hacer notar que la definición precisa de  $Z$  en estas ecuaciones es  $Z = \sum_k n_k \ln \Lambda_{ek} Z_k^2 / (n_e \ln \lambda)$  [63] ( $n_k$ : densidad de la especie iónica  $k$  de número atómico  $Z_k$ ) que, en plasmas con altas concentraciones de impurezas, como los que consideraremos en este capítulo, no debe confundirse con la carga iónica efectiva del plasma,  $Z_{eff}$ , usada en el capítulo anterior.  $Z_{eff}$  tiene solamente en consideración las colisiones de los electrones con los núcleos atómicos *apantallados* por los electrones orbitales, pero no las colisiones de los electrones con los núcleos *desnudos* que, para electrones de alta energía y concentraciones suficientemente grandes de impurezas puede aumentar significativamente el valor de  $Z$  respecto a  $Z_{eff}$ , tomando valores próximos al número atómico de la impureza dominante [59].

Las trayectorias de los electrones runaway en el espacio de momentos,  $(q_\parallel, q_\perp^2)$ , calculadas a partir de Ecs. (7.4) y (7.6), incluyendo los efectos de la radiación de *bremsstrahlung*, muestran nuevamente la existencia de dos puntos singulares: un punto de silla, que proporciona una estimación de la energía crítica para la generación runaway, y un foco estable, que permite obtener información sobre la energía máxima que los electrones runaway pueden alcanzar. Como en el Capítulo anterior, se puede obtener una relación analítica entre estos puntos y el campo eléctrico normalizado,  $D$ , teniendo en cuenta que los puntos singulares se encuentran en la intersección de los contornos  $\dot{q}_\parallel = 0$  y  $\dot{q} = 0$  (ó  $\dot{q}_\perp = 0$ ), lo que lleva a la relación

$$D = \frac{\gamma_s^2}{\cos\theta_s(\gamma_s^2 - 1)} \left\{ 1 + F_{gy} \frac{(\gamma_s^2 - 1)^{3/2}}{\gamma_s} \sin^2\theta_s + F_{gcb} \frac{(\gamma_s^2 - 1)^{5/2}}{\gamma_s} \right\} \quad (7.7)$$

con  $\cos\theta_s$ , usando  $\dot{q}_\perp = 0$  en Ec. (7.6), dado por

$$\cos^2\theta_s = 1 + \frac{F_{gcb}(\gamma_s^2 - 1)}{2F_{gy}} + \frac{\alpha + \gamma_s}{2F_{gy}(\gamma_s^2 - 1)^{3/2}} \times \left\{ 1 - \left[ \frac{4\alpha F_{gy}(\gamma_s^2 - 1)^{3/2}}{(\alpha + \gamma_s)^2} + \left( 1 + \frac{F_{gcb}(\gamma_s^2 - 1)^{5/2}}{\alpha + \gamma_s} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (7.8)$$

siendo

$$F_{gabr}(\gamma) = F_{gc} + F_{br} \alpha(\ln(2\gamma) - 1/3)/(\gamma^2 - 1)^{3/2} \quad (7.9)$$

donde  $\gamma_s$  y  $\theta_s$  son, respectivamente, el factor gamma relativista y el ángulo *pitch* en los puntos singulares.

A partir de estas ecuaciones, se puede estudiar el impacto sobre la dinámica runaway de las pérdidas por radiación de *bremsstrahlung*. Fig. 7.1 muestra el campo eléctrico normalizado, calculado usando Ecs. (7.7) - (7.9), como función de  $\gamma_s$  (línea continua) para  $B_0 = 3\text{T}$ ,  $R_0 = 3\text{m}$ ,  $n_e = 10^{21}\text{m}^{-3}$  y  $Z = 54$  (que corresponde a un plasma dominado por impurezas de Xe). La línea discontinua corresponde los resultados obtenidos sin incluir la radiación de *bremsstrahlung*. Mientras que el punto de silla y, por tanto, la energía crítica para la generación runaway (rama I en Fig. 7.1), no se ven afectados significativamente, se observa que la radiación de frenado, para los parámetros del plasma considerados, puede reducir de forma sustancial la energía máxima de los electrones runaway [62, 64] (rama II en la figura).

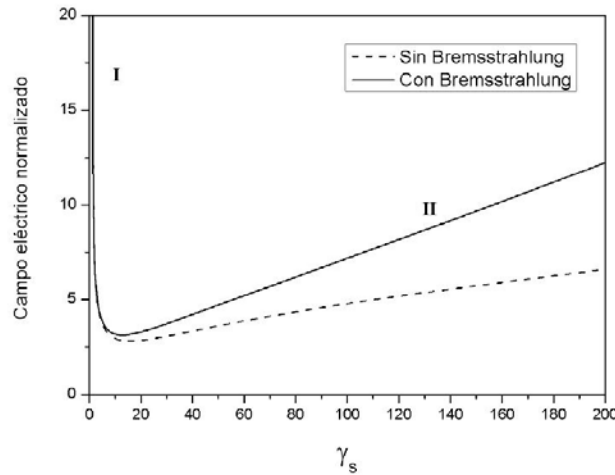


Figura 7.1: Campo eléctrico normalizado vs.  $\gamma_s$  en los puntos singulares obtenido incluyendo las pérdidas por radiación de *bremsstrahlung* (línea continua) y despreciando el efecto de la radiación de frenado (línea discontinua). Parámetros del plasma:  $B_0 = 3\text{T}$ ,  $R_0 = 3\text{m}$ ,  $n_e = 10^{21}\text{m}^{-3}$ ,  $Z = 54$ .

Estos resultados son importantes, ya que, sugieren que los experimentos de mitigación y control de disrupciones basados en la inyección de impurezas de alta  $Z$  podrían beneficiarse, de forma complementaria, de la reducción en la energía de los electrones runaway gracias al efecto de la radiación de *bremsstrahlung*.

## 7.2. Energía Límite

Pasamos ahora a analizar en detalle el efecto de la radiación de *bremsstrahlung* sobre la energía de los electrones runaway. La energía límite runaway,  $\gamma_l$ , se estimará usando la energía del electrón en el foco estable del espacio de fases, a partir

de Ecs. (7.7) - (7.9). El efecto de la radiación de *bremsstrahlung* se cuantificará mediante la caída relativa de la energía runaway debido a la radiación de frenado,  $\Delta\gamma_l/\gamma_{l0} \equiv (\gamma_{l0} - \gamma_l)/\gamma_{l0}$ , donde  $\gamma_l$  y  $\gamma_{l0}$  son las energías estimadas para  $F_{br} \neq 0$  (radiación de *bremsstrahlung* incluida) y  $F_{br} = 0$  (sin radiación de *bremsstrahlung*), respectivamente. Como se puede ver en Fig. 7.2, para los mismos parámetros que en Fig. 7.1,  $\Delta\gamma_l/\gamma_{l0}$  toma un valor máximo  $\sim 60\%$  para  $D \sim 8$ , disminuyendo de forma importante para valores más altos del campo eléctrico (normalizado).

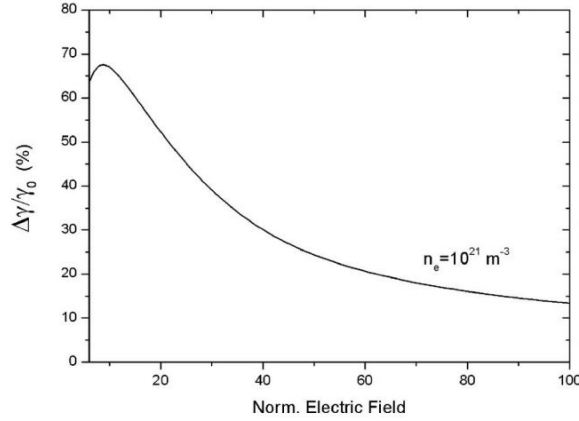


Figura 7.2: Caída relativa de  $\gamma_l$  debido a la radiación de *bremsstrahlung* como función del campo eléctrico normalizado. Parámetros del plasma:  $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m,  $n_e = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ,  $Z = 54$ .

La reducción en la energía del electrón debido a *bremsstrahlung* aumenta con la densidad y con  $Z$ , como se ilustra en la figura 7.3, en la que se muestra el valor máximo de la caída relativa de  $\gamma_l$  debido a la radiación de *bremsstrahlung* como función de la densidad,  $n_e$ , para tres valores diferentes de  $Z$  ( $Z = 18, 36, 54$ , correspondientes a Ar, Kr y Xe, respectivamente).

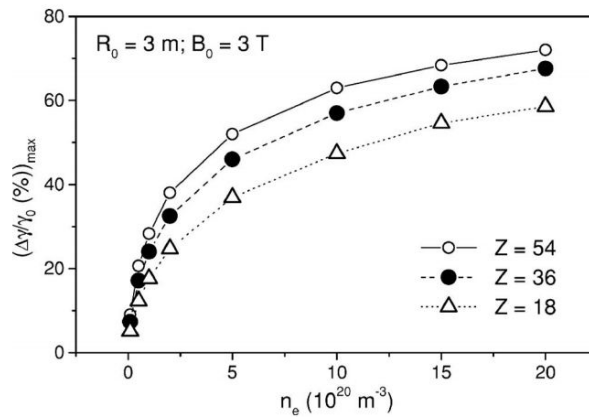


Figura 7.3: Caída relativa máxima de  $\gamma_l$  debido a la radiación de *bremsstrahlung* como función de la densidad para  $Z = 18, 36, 54$ . Parámetros del plasma:  $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m.

Fig. 7.4 muestra, para las mismas condiciones que Fig. 7.1, la energía límite  $\gamma_l$ ,

calculada a partir de Ecs. (7.7) - (7.9), incluyendo tanto la radiación sincrotrón como de *bremsstrahlung* (línea continua), junto con la energía límite obtenida teniendo en cuenta por separado cada uno de los tres mecanismos de pérdidas radiativas: la radiación sincrotrón asociada con movimiento el giro del electrón,  $\gamma_{gy}$ , la radiación asociada al movimiento de centro guía del electrón,  $\gamma_{gc}$ , y la contribución asociada a la radiación de *bremsstrahlung*,  $\gamma_{br}$ . Se puede observar que, para campos eléctricos pequeños, la energía del electrón está principalmente determinada por el movimiento de giro del electrón en su órbita de Larmor, ya que, en este caso, como se vio en el Capítulo 6, las colisiones permiten aumentar el ángulo *pitch* del electrón lo suficiente como para dar lugar a unas pérdidas de energía significativas ( $P_{gy} \propto \sin^2 \theta$  [15], donde  $P_{gy}$  es la potencia radiada asociada al movimiento de giro del electrón).

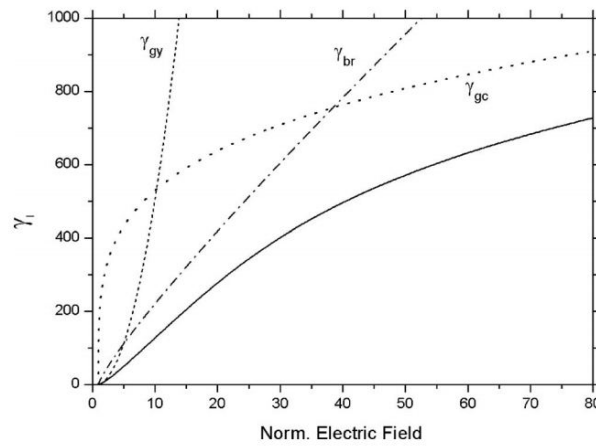


Figura 7.4: Energía límite,  $\gamma_l$ , en función del campo eléctrico normalizado (línea continua) junto con los límites de energía estimados suponiendo que las pérdidas por radiación están dominadas por el movimiento de giro del electrón alrededor de la línea de campo ( $\gamma_{gy}$ ), por el movimiento del centro guía ( $\gamma_{gc}$ ) y por la radiación de *bremsstrahlung* ( $\gamma_{br}$ ), respectivamente. Parámetros del plasma:  $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m,  $n_e = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ,  $Z = 54$ .

Para valores intermedios del campo eléctrico, las pérdidas por radiación están dominadas por la radiación de *bremsstrahlung*, esencialmente proporcional a  $\gamma_l$ . Finalmente, para valores suficientemente grandes del campo, la energía del electrón está determinada por la radiación asociada al movimiento del centro guía del electrón, que aumenta con  $\gamma_l^4$ .

A partir de Ec. (7.7), es posible obtener estimaciones sencillas para  $\gamma_l$  en los tres regímenes que acabamos de discutir. En la mayor parte de los casos, resulta razonable suponer que  $\gamma_l^2 \gg 1$  y  $\gamma_l \gg \alpha/2D$ , de modo que, a partir de Ecs. (7.4) y (7.5), el ángulo *pitch*,  $\theta_l$ , en  $\gamma_l$  se puede aproximar a  $\sin^2 \theta_l \simeq \alpha/D\gamma_l$  (para más detalles ver Apéndice A en Ref. [15], y la ecuación (7.7) se simplifica a

$$D \simeq 1 + \frac{\alpha F_{gy}}{D} \gamma_l + \alpha F_{br} \gamma_l \left( \ln(2\gamma_l) - \frac{1}{3} \right) + F_{gc} \gamma_l^4 \quad (7.10)$$

En los regímenes de valores bajos o intermedios del campo eléctrico (es decir, dominados por la radiación sincrotrón asociada al movimiento de Larmor o por la

radiación de *bremsstrahlung*), se tiene que  $F_{gy}\gamma_l^4 \ll (\alpha F_{gy}\gamma_l/D + \alpha F_{br}C\gamma_l)$ , donde  $C \equiv (\ln(2\gamma_l) - 1/3)$  y, por tanto,

$$\gamma_l \simeq \frac{D(D-1)}{\alpha F_{gy}(1 + (D/D_{gy}))} \quad (7.11)$$

con  $D_{gy} \equiv F_{gy}/F_{br}C$ . La condición de validez de esta aproximación,  $\alpha(F_{br}C + F_{gy}/D)\gamma_l \gg F_{gc}\gamma_l^4$ , se puede reescribir ahora utilizando Ec. (7.11), como  $D^4(D-1) \ll [(\alpha F_{gy})^4/F_{gc}] \cdot (1 + D/D_{gy})^4$ .

Para  $D \ll D_{gy}$ , el movimiento de giro del electrón alrededor de la línea de campo determina la energía del electrón y la Ec. (7.11) se puede simplificar como

$$\gamma_l \simeq \frac{D(D-1)}{\alpha F_{gy}} \quad (7.12)$$

mientras que para  $D \gg D_{gy}$ , la radiación de *bremsstrahlung* constituye el mecanismo de pérdida de energía dominante y  $\gamma_l$ , usando Ec. (7.11), se puede aproximar

$$\gamma_l \simeq \frac{D(D-1)}{\alpha F_{br}C} \quad (7.13)$$

En el régimen de alto campo eléctrico, la radiación sincrotrón asociada al movimiento del centro guía del electrón (en dirección toroidal) es dominante [es decir,  $\alpha(F_{gy}/D + F_{br}C)\gamma_l \ll F_{gc}\gamma_l^4$ ], y la expresión de la energía límite, a partir de Ec. (7.10), se simplifica a

$$\gamma_l \simeq \left( \frac{D-1}{F_{gc}} \right)^{1/4} \quad (7.14)$$

Como hicimos antes, podemos reescribir el rango de aplicabilidad de este resultado,  $\alpha(F_{gy}/D + F_{br}C)\gamma_l \ll F_{gc}\gamma_l^4$ , usando Ec. (7.14), como  $D(D-1)^{3/4} \gg (\alpha F_{gy}/F_{gc}^{1/4}) \cdot (1 + D/D_{gy})$ .

### 7.3. Condiciones para pérdidas de energía dominadas por la radiación de *bremsstrahlung*

El análisis que se ha llevado a cabo en la sección anterior ha permitido obtener expresiones simplificadas para la energía runaway en tres regímenes diferentes de campo eléctrico, cada uno de ellos dominado por un mecanismo de pérdidas radiativas distinto. Como se ha mostrado en Fig. 7.4, para condiciones dadas del plasma, existe un rango de valores del campo eléctrico para el que la radiación de *bremsstrahlung* constituye el mecanismo de pérdidas por radiación dominante. En esta sección, investigaremos en detalle los parámetros que definen dicha región.

#### 7.3.1. *Bremsstrahlung* vs movimiento de giro

Analizaremos en primer lugar las condiciones bajo las que las pérdidas asociadas a la radiación de *bremsstrahlung* son mayores que las debidas a la radiación sincrotrón asociada al movimiento de giro. Tomando el segundo y tercer término

en Ec. (7.7), que representan las contribuciones del movimiento de giro y del *bremssstrahlung*, respectivamente, se obtiene la condición,

$$F_{gcb} \frac{(\gamma_{1/2} - 1)^{5/2}}{\gamma_l} \geq F_{gy} \frac{(\gamma_{1/2} - 1)^{3/2}}{\gamma_l} \sin^2 \theta_l \quad (7.15)$$

que puede simplificarse, en el límite  $\gamma_l^2 \gg 1$ ,  $\gamma_l \gg \alpha/2D$ , a

$$\alpha F_{br} \gamma_l \left( \ln(2\gamma_l) - \frac{1}{3} \right) \geq \frac{\alpha F_{gy}}{D} \gamma_l \quad (7.16)$$

lo que conduce a la expresión

$$D \geq D_{gy} \equiv \frac{F_{gy}}{C F_{br}} \quad (7.17)$$

$[C \equiv (\ln(2\gamma_l) - \frac{1}{3})]$  que determina el campo eléctrico mínimo,  $D_{gy}$ , para que el efecto de la radiación de *bremssstrahlung* domina sobre la radiación sincrotrón asociada al movimiento de giro.

### 7.3.2. *Bremssstrahlung* vs movimiento del centro guía

De forma similar, utilizando las aproximaciones para el término de *bremssstrahlung* y para el movimiento del centro guía de Ec. (7.10), se puede obtener un criterio que garantice que la radiación de *bremssstrahlung* es mayor que la radiación asociada al movimiento del centro guía:

$$F_{br} \alpha \gamma_l C \geq F_g c \gamma_l^4 \implies \gamma_l \leq \left( \frac{\alpha C F_{br}}{F_g c} \right)^{1/3} \quad (7.18)$$

Este criterio establece el valor máximo de la energía para el que la radiación de *bremssstrahlung* domina sobre la radiación asociada al movimiento del centro guía y conduce a un campo eléctrico máximo,  $D_{gc}$ , para el que  $P_{br} \geq P_{gc}$  ( $P_{br}$ ,  $P_{gc} \equiv$  potencia radiada asociada a *bremssstrahlung* y al movimiento del centro guía, respectivamente). Este campo eléctrico,  $D_{gc}$ , puede estimarse sustituyendo la relación (7.18) para  $\gamma_l$  en Ec. (7.10) y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante,

$$D^2 - D(1 + 2\alpha F_{br} C \gamma_l) - \alpha F_{gy} \gamma_l = 0,$$

de solución

$$D_{gc} \equiv \left( \frac{1}{2} + \alpha F_{br} C \gamma_l \right) + \left\{ \left( \frac{1}{2} + \alpha F_{br} C \gamma_l \right)^2 + \alpha F_{gy} \gamma_l \right\}^{1/2} \quad (7.19)$$

con  $\gamma_l = (\alpha C F_{br} / F_g c)^{1/3}$ .

Por tanto, la condición para que la radiación de *bremssstrahlung* domine sobre la radiación sincrotrón asociada al movimiento del centro guía es que  $D \leq D_{gc}$ , con  $D_{gc}$  y  $\gamma_l$  dados por Ecs. (7.19) y (7.13), respectivamente.



### 7.3.3. Densidad y campos eléctricos críticos

Recapitulando, bajo unas condiciones dadas del plasma, las pérdidas de energía por radiación estarán dominadas por la radiación de *bremsstrahlung* en el rango de campos eléctricos (normalizados)  $D_{gy} \leq D \leq D_{gc}$ , con  $D_{gy}$  y  $D_{gc}$  dados por Ecs. (7.17) y (7.19), respectivamente. Este resultado tiene importantes consecuencias, como se ilustra en Fig. 7.5, en la que se representan  $D_{gy}$  y  $D_{gc}$  como función de la densidad para unos valores de los parámetros del plasma  $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m y  $Z = 18$ . Una primera observación importante es que existe una densidad mínima, a la que denominaremos a partir de ahora *densidad crítica*,  $n_{ec}$ , determinada por la condición  $D_{gy} = D_{gc}$  ( $n_e \sim 3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$  en la figura), por debajo de la cual la radiación nunca estará dominada por la radiación de *bremsstrahlung*. Más aún, para  $n_e \geq n_{ec}$ , la radiación de *bremsstrahlung* domina las pérdidas por radiación en un intervalo de campos eléctricos ( $D_{gy}(n_e), D_{gc}(n_e)$ ), de amplitud creciente con la densidad.

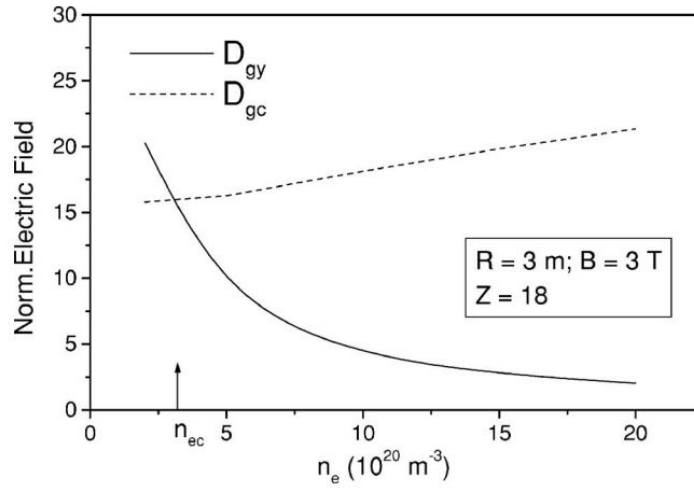


Figura 7.5: Campos eléctricos normalizados  $D_{gy}$  y  $D_{gc}$  vs densidad para  $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m,  $Z = 18$ . Las regiones dominadas por *bremsstrahlung* corresponden a  $D_{gy} \leq D \leq D_{gc}$ . La densidad crítica,  $n_{ec} \sim 3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , está también indicada.

La figura 7.6 presenta la densidad crítica,  $n_{ec}$ , obtenida a partir de la intersección de las curvas  $D_{gy}(n_e)$  y  $D_{gc}(n_e)$ , como función de  $Z$  para  $B_0 = 3$  T y  $R_0 = 3$  m. La densidad es, aproximadamente, inversamente proporcional a  $Z$ ,  $n_{ec} \sim Z^{-1}$ .

Se puede obtener una aproximación analítica sencilla para  $n_{ec}$  usando la condición  $D_{gy}(n_{ec}) = D_{gc}(n_{ec})$ , junto con las expresiones (7.17) y (7.19) para  $D_{gy}$  y  $D_{gc}$ , respectivamente:

$$D_{gy} \simeq \frac{F_{gy}}{CF_{br}} = D_{gc} \simeq \left( \frac{1}{2} + \alpha F_{br} C \gamma_l \right) + \left\{ \left( \frac{1}{2} + \alpha F_{br} C \gamma_l \right)^2 + \alpha F_{gy} \gamma_l \right\}^{1/2}. \quad (7.20)$$

Teniendo en cuenta que, en la mayor parte de los casos prácticos,  $\alpha F_{br} C \gamma_l \gg 1$ , esta ecuación se puede simplificar a

$$\frac{F_{gy}}{CF_{br}} = (\alpha F_{br} C \gamma_l) + [(\alpha F_{br} C \gamma_l)^2 + \alpha F_{gy} \gamma_l]^{1/2}, \quad (7.21)$$

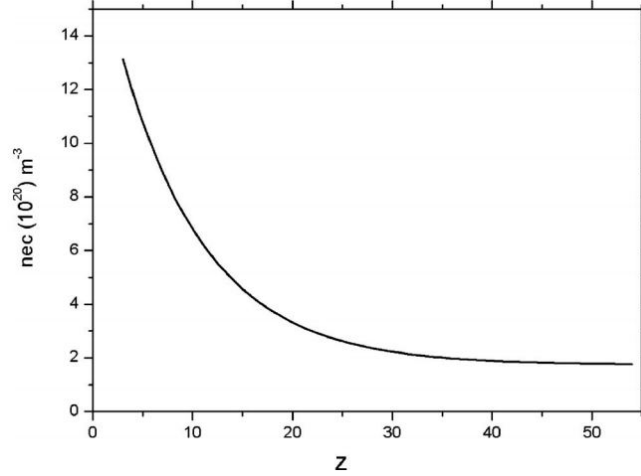


Figura 7.6: Densidad crítica,  $n_{ec}$ , vs carga efectiva,  $Z$  ( $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m).

que, usando Ec. (7.18) para  $\gamma_l$  lleva a

$$\left(\frac{F_{gy}}{CF_{br}}\right)^2 = 3\alpha F_{gy}\gamma_l = 3\alpha^{4/3} \frac{(F_{br}C)^{1/3}}{F_{gc}^{1/3}}. \quad (7.22)$$

Finalmente, sustituyendo en Ec. (7.22) las expresiones para los parámetros de radiación,  $F_{gy} = 2\varepsilon_0 B_0^2 / 3n_e \ln \Lambda m_e$ ,  $F_{gc} = F_{gy} (m_e c / e B_0 R_0)$  y  $F_{br} = (137\pi \ln \Lambda)^{-1}$ , se obtiene

$$n_{ec} \simeq 2\varepsilon_0 \left(\frac{137\pi}{3}\right)^{7/4} \left(\frac{c}{em_e}\right)^{1/2} \frac{(\ln \Lambda)^{3/4}}{C^{7/4}} \frac{B_0^{3/2}}{\alpha R_0^{1/2}}, \quad (7.23)$$

que puede reescribirse,

$$n_{ec}(10^{20} m^{-3}) \simeq 48 \frac{(\ln \Lambda)^{3/4}}{C^{7/4}} \frac{B_0^{3/2}}{(Z+1)R_0^{1/2}} \quad (7.24)$$

( $\alpha = 1 + Z$ ).

Este resultado sugiere que el efecto de la radiación de *bremsstrahlung*, comparado con el de la radiación sincrotrón, será mayor para campos magnéticos pequeños,  $B_0$ , y para valores altos de  $Z$  y  $R_0$ . Valores grandes de  $B_0$  favorecen la radiación sincrotrón asociada con el movimiento de giro del electrón, mientras que valores bajos de  $R_0$  aumentan la radiación asociada al movimiento del centro guía.

### 7.3.4. Efecto sobre la energía del electrón

De la discusión anterior se infiere que las condiciones  $n_e \geq n_{ec}$  y  $D \in (D_{gy}, D_{gc})$  son necesarias para que la radiación de *bremsstrahlung* desempeñe un papel principal en las pérdidas de energía electrónica por radiación. Bajo estas condiciones, la potencia debida a *bremsstrahlung* constituye al menos  $\sim 30\%$  de la potencia total radiada. Fuera de este rango de campos eléctricos, el efecto de la radiación de *bremsstrahlung* es mucho menor.

Es posible obtener una estimación simple de la reducción en la energía del electrón debida a *bremsstrahlung* tanto en el punto crítico como a lo largo de las curvas  $D_{gy}(n_e)$  y  $D_{gc}(n_e)$ . Así, en el punto crítico,  $n_{ec}$ , la potencia radiada debida a los tres mecanismos (radiación sincrotrón asociada al movimiento de giro, al movimiento del centro guía y a *bremsstrahlung*) es la misma y, usando Ec. (7.10), se obtiene

$$D \simeq 1 + 3F_{gc}\gamma_{l,cr} \implies \gamma_{l,cr} \simeq \left(\frac{D-1}{3F_{gc}}\right)^{1/4} \simeq 3^{-1/4}\gamma_{l0} \quad (7.25)$$

siendo  $\gamma_{l0}$  la energía límite calculada sin incluir el efecto de *bremsstrahlung*, que puede determinarse usando la aproximación del movimiento de centro guía,  $\gamma_{l0} \simeq (D-1)/F_{gc})^{1/4}$ . Por tanto, la caída relativa de la energía  $\Delta\gamma_l/\gamma_{l0} \equiv (\gamma_{l0} - \gamma_{l,cr})/\gamma_{l0}$  en el punto crítico se puede estimar

$$\left(\frac{\Delta\gamma_l}{\gamma_{l0}}\right)_{cr} \sim 24\% \quad (7.26)$$

A lo largo de la curva  $D_{gc}(n_e)$ , las pérdidas de radiación debidas a *bremsstrahlung* y al movimiento del centro guía son iguales. Es más, por encima del punto crítico, el campo eléctrico es suficientemente grande como para despreciar la radiación asociada al movimiento de giro y, por tanto, lejos del punto crítico

$$D \simeq 1 + 2F_{gc}\gamma_{l,Dgc} \implies \gamma_{l,Dgc} \simeq \left(\frac{D-1}{2F_{gc}}\right)^{1/4} \simeq 2^{-1/4}\gamma_{l0} \quad (7.27)$$

$[\gamma_{l0} \simeq (D-1)/F_{gc})^{1/4}]$  y la caída relativa de la energía debida a *bremsstrahlung* puede estimarse como

$$\left(\frac{\Delta\gamma_l}{\gamma_{l0}}\right)_{Dgc} \sim 16\% \quad (7.28)$$

De forma similar, a lo largo de la curva  $D_{gy}(n_e)$ , las pérdidas de potencia debidas a *bremsstrahlung* serán iguales a la potencia radiada asociada al movimiento de giro del electrón y, suficientemente lejos del punto crítico, la radiación sincrotrón asociada al movimiento del centro guía puede despreciarse. En este caso,

$$D \simeq 1 + \frac{2\alpha F_{gy}}{D}\gamma_{l,Dgy} \implies \gamma_{l,Dgy} \simeq \frac{D(D-1)}{2\alpha F_{gy}} \simeq \frac{\gamma_{l0}}{2} \quad (7.29)$$

$[\gamma_{l0} \simeq D(D-1)/\alpha F_{gy}]$  y la caída relativa de la energía debida a *bremsstrahlung*

$$\left(\frac{\Delta\gamma_l}{\gamma_{l0}}\right)_{Dgy} \sim 50\% \quad (7.30)$$

De este modo, cerca de la curva  $D_{gy}(n_e)$ , la caída de la energía es significativamente mayor. Entre las curvas  $D_{gy}$  y  $D_{gc}$ , la caída relativa de la energía aumenta, mientras que disminuye cuanto más nos alejamos de ellas. Para ilustrar este punto, Fig. 7.7 muestra el mapa de contorno para la caída relativa de la energía del electrón como función de la densidad y del campo eléctrico normalizado,  $D$ , obtenido usando Ecs. (7.7) y (7.8) ( $Z = 54$ ,  $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m). Una de las observaciones

más interesantes es que, para todo valor de la caída relativa de la energía, existe una densidad mínima (o umbral),  $n_{eth}$ , necesaria para poder encontrar caídas iguales o mayores. Además, para cada valor de la densidad  $n_e > n_{eth}$ , se encuentra un intervalo de campos eléctricos (de amplitud creciente con la densidad), para el que la caída relativa de la energía es igual o mayor que dicho valor.

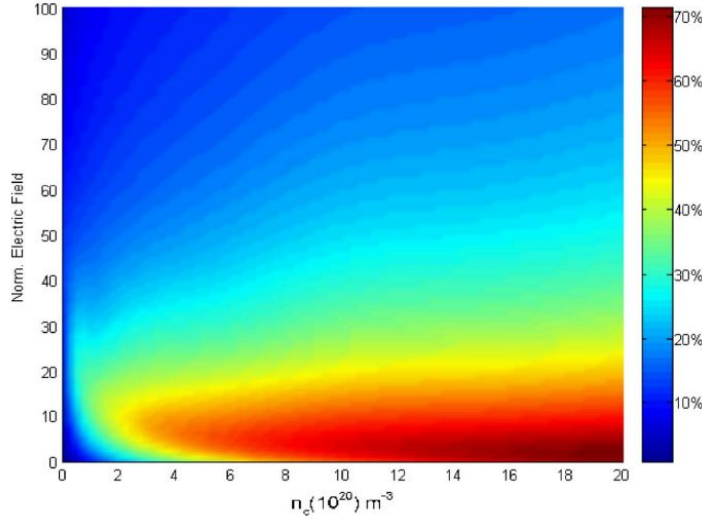


Figura 7.7: Superficie de contorno de la caída relativa de la energía del electrón debida a la radiación de *bremsstrahlung*,  $\Delta\gamma_1/\gamma_{10}$ , vs densidad y campo eléctrico normalizado ( $B_0 = 3$  T,  $R_0 = 3$  m,  $Z = 54$ ).

## 7.4. Electrones runaway durante disrupciones

En esta sección, teniendo en cuenta el análisis realizado en las secciones anteriores, exploraremos el papel que la radiación de *bremsstrahlung* puede jugar como mecanismo de control de la energía de los electrones runaway durante disrupciones. Prestaremos una especial atención a plasmas de alta  $Z$  y densidad, como los que se encuentran durante experimentos de mitigación de disrupciones mediante inyección de impurezas de alta  $Z$ , y en los que se espera que la radiación de *bremsstrahlung* sea especialmente importante.

En la figura 7.8 se muestra los campos eléctricos críticos  $E_{||gy}$  (línea continua) y  $E_{||gc}$  (línea discontinua) en función de la densidad para parámetros típicos del tokamak JET ( $R_0 = 3$  m;  $B_0 = 3$  T) e ITER ( $R_0 = 6,2$  m;  $B_0 = 5,3$  T), y  $Z = 54$  (inyección de Xe). De la figura se infiere que, para valores típicos del campo eléctrico durante una disrupción  $\sim 10$ - $100$  V/m, se necesitarían densidades  $n_e > (0,5 - 1) \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  para encontrar regímenes en los que la radiación de *bremsstrahlung* pueda contribuir de forma significativa al valor final de la energía del electrón,  $E_{||gy} < E_{||} < E_{||gc}$ . Es interesante notar que el campo eléctrico crítico  $E_{||gy}$  es mayor en el caso de ITER ( $E_{||gy} \sim 10$  V/m) que en el del tokamak JET ( $E_{||gy} \sim 4$  V/m), debido principalmente al campo magnético toroidal (mayor en ITER que en JET), lo que aumenta el efecto de la radiación asociada al movimiento de giro del electrón. El campo crítico  $E_{||gc}$  es también mayor en ITER, ya que, las pérdidas sincrotrón asociadas al movimiento del centro guía son en

este caso menores ( $R_0 \sim 6,2\text{m}$  en ITER frente a  $\sim 3\text{m}$  en JET) lo que, como consecuencia, aumenta la región dominada por la *bremsstrahlung*. El resultado es que, para campos eléctricos típicos durante disrupciones, el efecto de la radiación de *bremsstrahlung* sobre la energía final del electrón debería ser mayor en ITER que en JET.

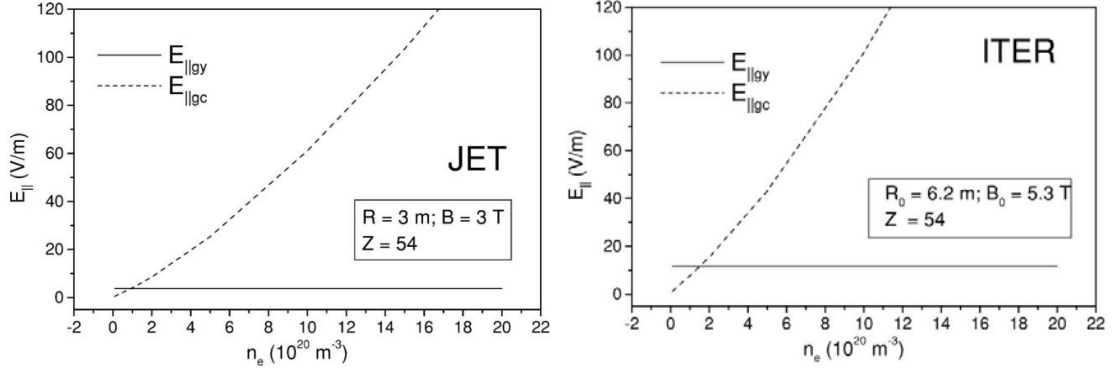


Figura 7.8: Campos eléctricos crítico,  $E_{\parallel gy}$  (línea continua) y  $E_{\parallel gc}$  (línea discontinua), vs densidad para  $Z = 54$  y parámetros típicos de los tokamaks JET ( $R_0 = 3\text{m}$ ;  $B_0 = 3\text{T}$ ) e ITER ( $R_0 = 6,2\text{m}$ ;  $B_0 = 5,3\text{T}$ ).

No obstante, debe tenerse en cuenta que los resultados de Fig. 7.8 se han obtenido suponiendo condiciones estacionarias y analizando el papel jugado por los diferentes mecanismos de pérdida radiativa en el foco estable en el espacio de momentos, en el energía absorbida del campo eléctrico toroidal se compensa con las pérdidas colisionales y las debidas a la radiación sincrotrón y de *bremsstrahlung*). Estas condiciones no se dan en el caso de una disrupción, que es un fenómeno transitorio en el que los electrones no tienen tiempo suficiente para alcanzar la energía límite en el foco estable. Por tanto, para una evaluación más realista de la energía que los electrones runaway pueden alcanzar durante una disrupción, así como del papel jugado por la radiación de *bremsstrahlung*, debemos estudiar la evolución de la energía del electrón durante la fase de caída de la corriente (fase de *current quench*) de la disrupción.

En nuestro caso, bastará con un modelo simple para la disrupción, que denominaremos modelo de *voltaje constante*, usado en Refs. [16, 22], en el que se usa un valor constante (promedio) del campo eléctrico durante la caída de la *current quench* de la corriente. Este modelo se puede resumir del siguiente modo: durante la pérdida de confinamiento del plasma (fase de *thermal quench*), se produce una redistribución de la corriente del plasma, que aplanan el perfil de corriente y da lugar a un aumento de la corriente total (típicamente  $\sim 15\%$ ), así como a un *pico* de voltaje negativo [65]. A continuación comienza la fase de caída de la corriente (*current quench*), que se supondrá lineal, desde su valor inicial  $I_0$  hasta su valor final, el *plateau* de corriente runaway  $I_r$ , en un tiempo característico de caída  $\tau_d$ . El valor del voltaje por vuelta toroidal,  $V_l$ , durante esta fase se estimará a partir de la inductancia,  $L$ , del plasma y de la derivada de la corriente,  $V_l = -LdI_p/dt$ , y el campo eléctrico toroidal,

$$E_{\parallel} = \frac{V_l}{2\pi R_0} \simeq \frac{L}{2\pi R_0} \frac{I_0 - I_r}{\tau_d} \quad (7.31)$$

Los electrones runaway generados serán acelerados por el campo eléctrico y la energía máxima que pueden alcanzar estará limitada por las pérdidas por radiación asociadas al movimiento del centro guía y al movimiento de giro del electrón, así como por la radiación de *bremsstrahlung*. Para evaluar esta energía máxima, se supondrá que los electrones runaway se generan con una energía baja ( $\gamma \sim 2$ ) al comienzo de la caída de la corriente y que evoluciona en el tiempo de acuerdo con las ecuaciones de partícula test (7.4) y (7.5). El campo eléctrico toroidal se estimará usando  $E_c$  (7.31) y los parámetros del plasma se supondrán estacionarios durante el *current quench*.

En Fig. 7.9 se representa la energía runaway estimada como función de la densidad para una disrupción en JET de 4.5 MA ( $R_0 = 3$  m,  $a = 1$  m,  $B_0 = 3$  T,  $T_e = 5$  eV,  $L \simeq 4 \mu\text{H}$ ,  $\tau_d = 15$  ms) [66] (figura de la izquierda), con una corriente runaway típica de 2 MA ( $I_r \sim 40\%$  de la corriente del plasma antes de la disrupción). También se representa (figura de la derecha) las predicciones para una disrupción en ITER de 15 MA ( $R_0 = 6,2$  m,  $a = 2$  m,  $B_0 = 5,3$  T,  $T_e = 5$  eV,  $L \simeq 9 \mu\text{H}$ ,  $\tau_d = 50$  ms), suponiendo también una corriente runaway  $\sim 40\%$  de la corriente antes de la disrupción ( $I_r \sim 6$  MA).

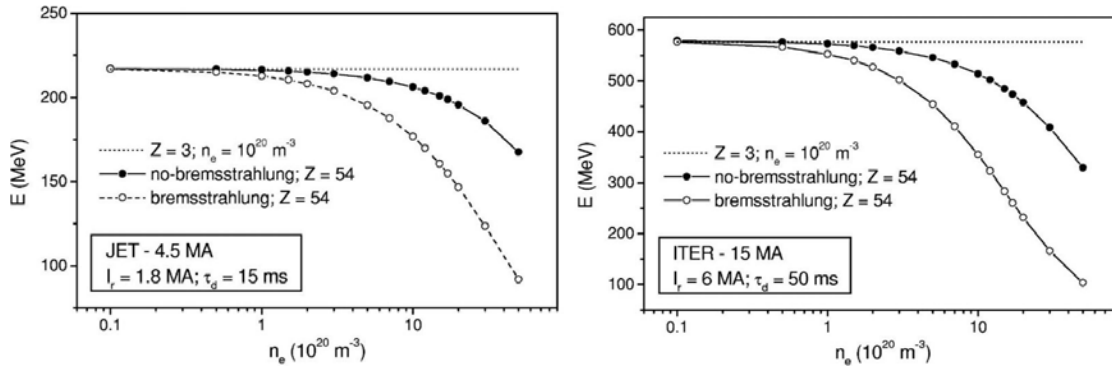


Figura 7.9: Energía de los electrones runaway como función de  $n_e$  para una disrupción de 4.5 MA en JET (figura de la izquierda) y una disrupción de 15 MA en ITER (figura de la derecha). En ambos casos se supone una corriente runaway  $\sim 40\%$  de la corriente del plasma antes de la disrupción. Los círculos blancos corresponden a las predicciones para inyección de Xe ( $Z = 54$ ) en el plasma, la línea horizontal a las estimaciones para una disrupción típica sin inyección de impurezas ( $Z = 3$ ,  $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ) y los círculos negros al caso de inyección de Xe ( $Z = 54$ ) pero despreciando el efecto de la radiación de *bremsstrahlung*.

Se comparan los resultados obtenidos para  $Z = 54$  (inyección de Xe; círculos blancos) con la energía predicha para una disrupción típica sin inyección de impurezas ( $Z = 3$ ,  $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ; línea horizontal) junto con las estimaciones realizadas teniendo en cuenta el efecto de las impurezas ( $Z = 54$ ) pero sin incluir la radiación de *bremsstrahlung* (círculos negros). Los resultados mostrados en la figura confirman que el efecto de la radiación de *bremsstrahlung* se espera que sea mayor en disrupciones típicas en ITER que en JET.

Fig. 7.10 muestra una comparación entre la energía límite calculada en JET (figura de la izquierda) e ITER (figura de la derecha) como función de la corriente del plasma antes la disrupción, para  $Z = 54$  (inyección de Xe) y  $n_e = 5 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ .

(líneas de puntos). Como comparación, se incluyen también en ambas figuras las estimaciones realizadas para disrupciones típicas sin inyección de impurezas ( $Z = 3$ ,  $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ; línea continua) y con inyección de Xe ( $Z = 54$ ) pero sin incluir la radiación de *bremsstrahlung* (líneas discontinuas). De nuevo, se observa que el efecto de la radiación de *bremsstrahlung* es mayor en ITER que en JET. Es también interesante hacer notar que, si las pérdidas debidas a *bremsstrahlung* no son incluidas (líneas discontinuas), la reducción en la energía del electrón debida al aumento de  $Z$  y de la densidad es menor para las corrientes más altas (es decir, para los campos eléctricos más grandes). Esto se debe a que, para los campos eléctricos más pequeños, debido a la alta  $Z$  y densidad, las colisiones aumentan el ángulo *pitch* del electrón y, con ello, la radiación asociada al movimiento de giro del electrón, mientras que para campos eléctricos grandes el efecto de las colisiones es mucho menor y el ángulo *pitch* del electrón es próximo a cero, lo que reduce de forma sustancial las pérdidas asociadas a la radiación sincrotrón. Por el contrario, el efecto asociado a la radiación de *bremsstrahlung* (líneas de puntos) aumenta de forma significativa con la corriente del plasma. Para bajas corrientes, la radiación asociada con el movimiento de giro del electrón es dominante ( $(E_{||} \leq E_{||gy})$ ), pero, cuando la corriente aumenta, los electrones entran en el régimen dominado por la radiación de *bremsstrahlung* ( $E_{||gy} \leq E_{||} \leq E_{||gc}$ ), lo que lleva a una reducción notable de la energía del electrón.

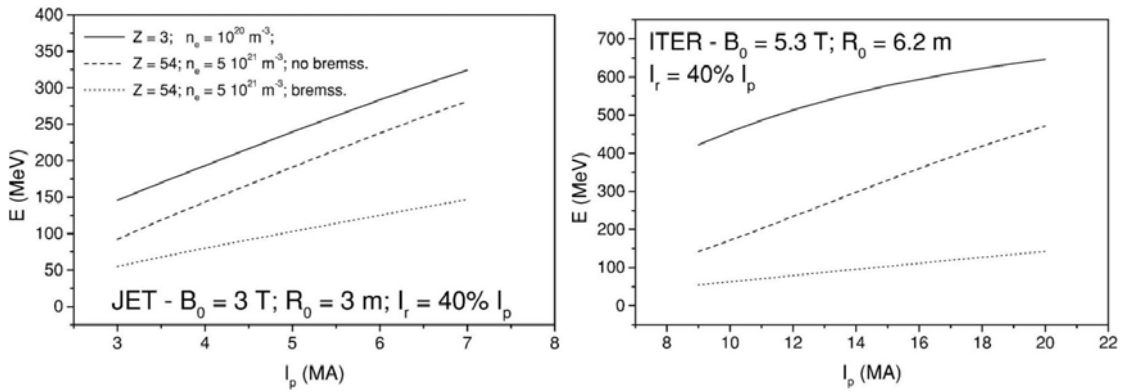


Figura 7.10: Comparación entre la energía límite de los electrones runaway como función de la corriente del plasma antes de la disrupción,  $I_p$ , en los tokamaks JET (figura de la izquierda) e ITER (figura de la derecha). En ambos casos, se supone que la corriente runaway  $I_r \sim 40\% I_p$ ,  $Z = 54$  (inyección de Xe) y  $n_e = 5 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  (líneas de puntos). Como comparación, se incluyen las estimaciones realizadas para disrupciones típicas sin inyección de impurezas ( $Z = 3$ ,  $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ; líneas continuas) y para el caso de inyección de impurezas ( $Z = 54$ ,  $n_e = 5 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ ) pero despreciando el efecto de la radiación *bremsstrahlung* (líneas discontinuas).

En principio, para valores de la corriente suficientemente grandes ( $E_{||} \geq E_{||gc}$ ), debería observarse una disminución en la contribución de la radiación *bremsstrahlung*. Sin embargo, esto no ocurre en Fig. 7.10 porque, para los valores típicos de la corriente en JET e ITER, el campo eléctrico permanece próximo o por debajo del campo crítico  $E_{||gc}$  y, por tanto, dentro del espacio de parámetros del plasma dominado por la radiación de *bremsstrahlung*.





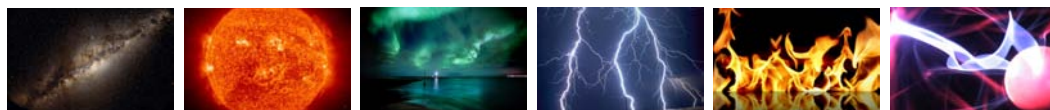
# Parte IV

## Conclusiones



# 8

## Conclusiones



*There are no facts, only interpretations.*

F. Nietzsche

**E**n esta tesis se han abordado algunas de las cuestiones más importantes relativas al fenómeno runaway en plasmas tokamak: (1) generación y formación de la población runaway; (2) energía máxima que los electrones runaway pueden alcanzar. Se exponen a continuación las conclusiones más relevantes de este estudio:

### Generación y dinámica runaway

En primer lugar (Parte II: Capítulos 3 - 5), se ha analizado la dinámica de la generación y formación de la función de distribución runaway en estado estacionario. Este análisis se ha basado en las ecuaciones de Langevin para los electrones runaway, método presentado y desarrollado en el Capítulo 3 a partir del formalismo de Ref. [33], que permite incluir en la descripción de partícula de los electrones runaway el efecto aleatorio de las colisiones coulombianas con los electrones e iones térmicos. Se ha usado una aproximación no relativista, adecuada para este análisis en la mayor de los casos prácticos, siempre y cuando el campo eléctrico no sea excesivamente pequeño ( $E_{||}/E_D < kT_e/m_e c^2$ ). Los resultados más importantes de este estudio son:

- En el capítulo 4, se ha obtenido la *probabilidad runaway*,  $R(v_{||}, v_{\perp})$ , en el espacio de velocidades, que determina la probabilidad de que un electrón con una velocidad inicial  $(v_{||}, v_{\perp})$  se convierta en runaway.
- A partir de dicha probabilidad, se ha introducido un criterio sencillo para la generación de electrones runaway mediante la condición  $R(v_{||}, v_{\perp}) = 50\%$ :

- Este criterio define una línea en el espacio de velocidades, la *separatriz runaway*  $S_r$ , que separa la región runaway (situada por encima de  $S_r$  en el espacio de velocidades) de la región térmica (no runaway, por debajo de  $S_r$  en el espacio de velocidades).
- Dado que la mayor parte de los electrones se mueven en la dirección de la fuerza eléctrica asociada al campo eléctrico (dirección paralela) y, por tanto,  $v_{\perp} \sim 0$ , se puede simplificar esta condición introduciendo la *velocidad crítica*,  $v_r$ , definida por la relación  $R(v_r, 0) = 50\%$ . Se ha determinado la dependencia de dicha velocidad crítica de los parámetros del plasma, obteniéndose  $v_r \sim (2 + Z_{eff})^{0,23} \epsilon^{-0,475}$ .
- En el Capítulo 5, se ha usado la ecuación de Langevin para calcular la función de distribución runaway e investigar la formación de la población runaway en condiciones estacionarias:
  - La función de distribución,  $f_e(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , muestra una anisotropía en la dirección del campo eléctrico, que aumenta con el valor del campo eléctrico y disminuye con la colisionalidad del plasma. Asimismo, la magnitud de la función de distribución cerca de la separatriz runaway es mayor para campos eléctricos altos y baja colisionalidad, lo que conduce en estos casos a una mayor producción de electrones runaway por difusión en el espacio de velocidades a través de la separatriz. Curiosamente, aunque las regiones en el espacio de velocidades lejos de la separatriz tienen una probabilidad runaway baja, pueden contribuir de forma importante a la formación de la población final runaway, debido a que en estas regiones el número de electrones (que potencialmente se pueden llegar a convertir electrones runaway) es mayor.
  - A partir de la función de distribución,  $f_e(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , se ha calculado la *función de distribución paralela*,  $F(v_{\parallel})$ , que determina la densidad de electrones como función de la velocidad en dirección paralela al campo,  $v_{\parallel}$ . La aceleración debida al campo eléctrico da lugar a la formación de una región aplanada o *plateau* que comienza aproximadamente en la velocidad crítica,  $v_r$ , y que podemos definir como la *región runaway*,  $v_{\parallel} > v_r$ .
  - El segundo momento en la velocidad perpendicular de  $f_e(v_{\parallel}, v_{\perp})$  se ha usado para calcular la *temperatura perpendicular*,  $T_{\perp}(v_{\parallel})$ , que proporciona información sobre el ensanchamiento de la función de distribución runaway en dirección perpendicular al campo debido a las colisiones coulombianas. Se observa que, aunque los electrones runaway son mucho menos colisionales que los electrones térmicos, la dispersión perpendicular debida a las colisiones conduce a una temperatura perpendicular en la región runaway,  $v_{\parallel} > v_r$ , considerablemente mayor que la temperatura del plasma térmico que aumenta con  $v_{\parallel}$ .
  - Se ha obtenido la *producción Dreicer* (número de electrones runaway que se generan por unidad de tiempo,  $dn_r/dt$ , por difusión a través de la velocidad crítica). Los resultados obtenidos están en acuerdo con las estimaciones clásicas basadas en la solución de la ecuación de Fokker-Planck para los electrones runaway.

Probablemente, la contribución más novedosa de este análisis de la generación y dinámica runaway, basado en la ecuación de Langevin, es la que se refiere al papel jugado por la dinámica perpendicular al campo que, a nuestro entender, no había sido analizado hasta ahora en la literatura con suficiente detalle. Aunque el fenómeno runaway depende esencialmente de la aceleración de los electrones por el campo eléctrico en dirección paralela al campo, y los electrones runaway son muy poco colisionales en comparación con los electrones térmicos, la dispersión colisional de los electrones runaway en dirección perpendicular al campo tiene un efecto determinante sobre la forma de la función de distribución y, con ello, sobre la producción de electrones runaway y la población final de electrones en la región runaway:

- Como consecuencia de la dispersión colisional perpendicular al campo, los electrones ganan energía en dirección perpendicular. Esto reduce las pérdidas netas de energía debido a las colisiones y facilita la generación de electrones runaway, reduciendo el valor de la velocidad crítica,  $v_r$ . Debido a este efecto, el valor estimado en el Capítulo 4 de  $v_r \sim (2 + Z_{eff})^{0,23} \epsilon^{-0,475}$ , que incluye el efecto de la dinámica perpendicular al campo, es sustancialmente menor que la condición Dreicer,  $v_D \sim (2 + Z_{eff})^{0,5} \epsilon^{-0,5}$ , obtenida considerando únicamente la dinámica paralela (es decir, la aceleración del campo eléctrico y la fuerza de fricción colisional sólo en dirección paralela).
- Como se ha dicho antes, debido a la dispersión perpendicular de los electrones, se produce en la región runaway ( $v_{||} > v_r$ ) un ensanchamiento de la función de distribución en dirección perpendicular, descrito cuantitativamente por medio de  $T_{\perp}(v_{||})$ , que aumenta con la colisionalidad del plasma (bajo campo eléctrico y  $Z_{eff}$  alta).
- El incremento en el número de electrones debido al ensanchamiento perpendicular de la distribución produce como resultado un aumento en la magnitud del *plateau* runaway,  $F(v_{||})$ , y, por tanto, de la producción runaway,  $dn_r/dt$ . Además, este efecto no se restringe sólo a la región runaway,  $v_{||} > v_r$ , sino que, debido a las colisiones, los electrones runaway son también dispersados en la región  $v_{||} < v_r$  lo que da lugar a un ensanchamiento perpendicular y a una desviación de la distribución maxwelliana incluso para  $v_{||} < v_r$ .
- El efecto de la dinámica perpendicular sobre la producción runaway se ha analizado en detalle en el Capítulo 5. La conclusión principal es que, aunque la producción de electrones runaway disminuye cuando el plasma es más colisional ( $Z_{eff}$  aumenta o el campo eléctrico disminuye) debido a la disminución de la fuerza neta (fuerza eléctrica menos fuerza de fricción colisional) sobre el electrón en dirección paralela al campo, el aumento de la población runaway en dirección perpendicular debido a la dispersión colisional puede contrarrestar en gran medida este efecto, aumentando de forma sustancial la producción runaway sobre los valores que cabría esperar considerando únicamente la dinámica paralela (es decir, la temperatura perpendicular en la región runaway igual a la temperatura térmica).

## Energía límite

La Parte III (Capítulos 6 y 7) de esta memoria se ocupa de la energía que los electrones runaway generados pueden alcanzar. Dado que esta energía puede ser muy grande, en este caso ha sido necesario tener en cuenta el carácter relativista de los electrones runaway. No obstante, este tratamiento se ha podido simplificar de forma significativa teniendo en consideración que, para electrones de alta energía, la difusión colisional asociada al efecto estocástico de las colisiones se reduce de forma importante, lo que permite sustituir un tratamiento más sofisticado basado en la ecuación de Fokker-Planck o de Langevin por un modelo más simple, conocido como *modelo de partícula test*, en el que se estudian las trayectorias promedio de los electrones runaway en el espacio de momentos.

En el Capítulo 6, se han revisado, basándonos en Ref. [15], las características básicas de este modelo y algunos de sus resultados más importantes. El Capítulo 7 presenta la contribución original de esta memoria a este campo. En él se analiza el papel que puede desempeñar la radiación de *bremsstrahlung* como mecanismo de control de la máxima energía que los electrones runaway pueden alcanzar, en particular durante disrupciones. La inyección de impurezas de alta  $Z$  (*MGI: Massive Gas injection*) constituye uno de los métodos principales propuestos para el control de las disrupciones en tokamaks y, en las condiciones de alta densidad y carga iónica característica de estos experimentos, la radiación de *bremsstrahlung* puede constituir un mecanismo importante de pérdida de energía de los electrones runaway. El análisis realizado en el Capítulo 7 de esta tesis, basado en el modelo de partícula test, incluye la aceleración del campo eléctrico, las colisiones con las partículas del plasma, así como la deceleración debida a las pérdidas por radiación sincrotrón y, por supuesto, de *bremsstrahlung*. Los principales resultados se pueden resumir del siguiente modo:

- Bajo unas condiciones de densidad y  $Z$  suficientemente altas, la radiación de *bremsstrahlung* puede reducir de forma apreciable la energía máxima que los electrones runaway pueden alcanzar.
- Se han obtenido expresiones analíticas sencillas para la energía límite del electrón como función de los parámetros del plasma en distintos regímenes de campo eléctrico: el régimen de campo eléctrico bajo/intermedio, dominado por la radiación sincrotrón asociada al movimiento de giro del electrón y por la radiación de *bremsstrahlung*, y el régimen de campo eléctrico alto, dominado por la radiación sincrotrón asociada al movimiento del centro guía del electrón.
- Se han determinado las condiciones bajo las que la radiación de *bremsstrahlung* constituye el mecanismo dominante de pérdida de energía por radiación. Para unas condiciones dadas del plasma, se encuentra una *densidad mínima o crítica* ( $n_{ec} \sim B_0^{2/3} R_0^{-1/2} Z^{-1}$ ) necesaria para que las pérdidas de energía puedan estar dominadas por *bremsstrahlung*. Por encima de esta densidad ( $n_e > n_{ec}$ ), la radiación de *bremsstrahlung* domina las pérdidas por radiación en un intervalo de campos eléctricos  $(E_{||gy}(n_e), E_{||gc}(n_e))$  de amplitud

creciente con la densidad. Fuera de este rango de campos eléctricos, la radiación sincrotrón constituye el mecanismo principal de pérdida de energía. Este análisis debería servir como guía para poder definir con mayor precisión las condiciones más adecuadas para que la radiación de *bremssstrahlung* pueda contribuir a controlar de forma eficiente la energía de los electrones runaway.

- Aplicación de estos resultados a las condiciones típicas de alta  $Z$  y densidad que se esperan en los experimentos de control de disrupciones mediante inyección de impurezas, sugiere que la radiación de *bremssstrahlung* puede tener un efecto importante sobre la energía de los electrones runaway generados durante la disrupción. Por ejemplo, en el caso de grandes dispositivos como JET o ITER, y para la inyección de impurezas de Xe, se ha estimado que para densidades  $n_e > (0,5 - 1) \times 10^{21} m^{-3}$ , las pérdidas de energía de los electrones runaway estarán dominadas por *bremssstrahlung*. Asimismo, se ha obtenido que el efecto de la radiación de *bremssstrahlung* sobre la energía final del electrón debería ser mayor en ITER que en JET, principalmente debido a su mayor tamaño ( $R_0$ ) lo que reduce el efecto de la radiación sincrotrón asociada al movimiento del centro guía del electrón en comparación con las pérdidas debidas a la radiación de *bremssstrahlung*. Más aún, se ha encontrado que en JET e ITER, y para densidades suficientemente altas en estos experimentos, la radiación de *bremssstrahlung* debe constituir el mecanismo principal de disipación de energía de los electrones runaway en todo el rango de corrientes posibles del plasma antes de la disrupción (es decir, en todos los casos, el valor estimado del campo eléctrico durante la disrupción se encuentra dentro del intervalo crítico  $(E_{||gy}(n_e), E_{||gc}(n_e))$  dominado por la radiación de *bremssstrahlung*).

Por supuesto, debería tenerse en cuenta que este análisis se ha basado en un modelo simple de voltaje constante para la disrupción [22]. Un tratamiento más realista debería incluir de forma autoconsistente los valores de los parámetros del plasma (densidad, carga efectiva, etc) resultantes de la inyección de impurezas en estos experimentos, así como, también de forma autoconsistente, la evolución del perfil de corriente (incluyendo la generación de electrones runaway mediante el mecanismo Dreicer y de avalancha) y del campo eléctrico durante la fase de *current quench* de la disrupción, lo que constituye una línea futura de trabajo en este campo.





# Bibliografía

- [1] U.S. Department of Energy. *World consumption of primary energy by energy type and selected country groups, 1980-2004*. Energy Information Administration, 2006. 7
- [2] EURATOM/CCFE Fusion Association. *Annual Report 2011/2012*. CCFE, 2012. 10
- [3] K.Thomsen et al. *ITER H mode confinement database update*. Nucl.Fusion, 34, 1994. 11
- [4] H.Dreicer. *Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas I*. Phys. Rev. Lett., 115, 1959. 13, 14
- [5] R.Jaspers. *Relativistic runaway electrons in tokamak plasmas*. PhD thesis, Technical University Eindhoven, 1995. 13
- [6] F.Anderson. *Título de la tesis de Anderson*. PhD thesis, Chalmers University of Technology (Göteborg), 2005. 13
- [7] J.Wesson. *Tokamaks*, volume 149. OUP Oxford, 2011. 14
- [8] J.W.Connor and R.J. Hastie. *Relativistic limitations on runaway electrons*. Nucl.Fusion, 15, 1975. 16, 19, 35, 38, 46, 66, 71
- [9] H.Dreicer. *Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas II*. Phys. Rev. Lett., 117, 1960. 17, 46, 57
- [10] R.Jayakumar et al. *Collisional avalanche exponentiation of runaway electrons in electrified plasmas*. Phys. Rev. Lett. A, 172, 1993. 17, 18
- [11] R.M.Kulsrud et al. *Runaway electrons in a plasma*. Phys. Rev. Lett., 31, 1973. 17, 34, 35, 46
- [12] H.Knoepfel and D.A.Spong. *Runaway electrons in toroidal discharges*. Nucl. Fusion, 19, 1979. 18, 20, 35, 57, 58
- [13] M.N.Rosenbluth and S.V.Putvinski. *Theory for avalanche of runaway electrons in tokamaks*. Nucl. Fusion, 37, 1997. 19
- [14] L.-G.Eriksson et al. *Current Dynamics during Disruptions in Large Tokamaks*. Phys. Rev. Lett., 92, 2004. 19
- [15] J.R.Martín-Solís et al. *Momentum space structure of relativistic runaway electrons*. Phys. Plasmas, 5(6):2370, 1998. 19, 66, 68, 72, 73, 74, 80, 96

- [16] J.R.Martín-Solís et al. *Energy limits on runaway electrons in tokamak plasmas*. Phys. Plasmas, 6, 1999. 20, 22, 87
- [17] B.Esposito et al. *Runaway electron measurements in the JET tokamak*. Plasma Physics and Controlled Fusion, 28, 1996. 20
- [18] D.G.Whyte et al. *Mitigation of Tokamak Disruptions Using High-Pressure Gas Injection*. Phys. Rev. Lett., 86, 2002. 20, 22, 66, 75
- [19] M.Bakhtiari et al. *Fast plasma shutdown scenarios in the JT-60U tokamak using intense mixed gas puffing*. Nucl. Fusion, 42, 2002. 20, 22, 66, 75
- [20] J.R.Martín-Solís et al. *Predictions on runaway current and energy during disruptions in tokamak plasmas*. Phys. Plasmas, 7, 2000. 22
- [21] H.M.Smith and E.Verwichte. *Hot tail runaway electron generation in tokamak disruptions*. Phys. Plasmas, 15, 2006. 22
- [22] A.J.Russo. *Effect of ripple on runaway electrons in tokamaks*. Nucl. Fusion, 31, 1991. 22, 66, 67, 87, 97
- [23] J.R.Martín-Solís et al. *Effect of magnetic and electrostatic fluctuations on the runaway electron dynamics in tokamak plasmas*. Phys. Plasmas, 6, 1999. 22
- [24] P.Helander et al. *Suppression of runaway electron avalanches by radial diffusion*. Phys. Plasmas, 7, 2000. 22
- [25] J.R.Martín-Solís and R.Sánchez. *Estimation of synchrotron radiation and limiting energy of high-energy runaway electrons in tokamak stochastic magnetic fields*. Phys. Plasmas, 13, 2006. 22
- [26] J.R.Martín-Solís and R.Sánchez. *Pitch angle scattering and synchrotron radiation of relativistic runaway electrons in tokamak stochastic magnetic fields*. Phys. Plasmas, 15, 2008. 22
- [27] R.Yoshino et al. *Generation and termination of runaway electrons at major disruptions in JT-60U*. Nucl. Fusion, 39, 1999. 22
- [28] H.Tamai et al. *Runaway current termination in JT-60U*. Nucl. Fusion, 42, 2002. 22
- [29] M.Lehnen et al. *Runaway generation during disruptions in JET and TEXTOR*. Journal of Nuclear Materials, 390-391, 2009. 22
- [30] P.L.Taylor et al. *Disruption mitigation studies in DIII-D*. Phys. Plasma, 6, 2000. 22
- [31] R.W.Harvey et al. *Runaway electron production in DIII-D killer pellet experiments, calculated with the CQL3D/KPRAD model*. Phys. Plasma, 7, 2000. 22
- [32] P.Langevin. *On the theory of Brownian motion*. 1908. 25, 36

- [33] M.G.Cadjan and M.F.Ivanov. *Langevin approach to plasma kinetics with Coulomb collisions*. Journal of plasma physics, 61(1):89, 1999. 26, 38, 93
- [34] N.A.Krall and A.W.Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. San Francisco, 1986. 29
- [35] R.Goldston and P.H.Rutherford. *Introduction to plasma physics*. Taylor & Francis, 2010. 29
- [36] F.Chen and M.A.Lieberman. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. Plenum Press, New York, 1984. 31
- [37] K.Miyamoto. *Plasma physics for nuclear fusion*. MIT press Cambridge, Mass., 1989. 31
- [38] J.C.Wiley et al. *Simulations of the runaway electron distributions*. Physics of Fluids, 23(11):2193, 1980. 34
- [39] V.Fuchs et al. *A one-dimensional model for lower-hybrid current drive including perpendicular dynamics*. Physics of Fluids, 28(12):3619, 1985. 35, 56, 58
- [40] A.V.Gurevich. *On the theory of runaway electrons*. Sov. Phys. JETP, 12(5):904, 1961. 35, 46, 55, 58, 59
- [41] R.H.Cohen. *Runaway electrons in an impure plasma*. Physics of Fluids, 19:239, 1976. 35, 46
- [42] A.Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Ann. der Physik, 1905. 35
- [43] M.San Miguel and R.Toral. *Stochastic Effects in Physical Systems*, 1997. 36, 37, 41, 42
- [44] N.G.Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*, volume 1. North holland, 1992. 37
- [45] M.Ivanov and V.F.Shvets. *The use of the particle method to simulate a collisional plasma*. In Akademiia Nauk SSSR Doklady, volume 238, page 1324, 1978. 38
- [46] M.Ivanov and V.F.Shvets. *Method of stochastic differential equations for calculating the kinetics of a collision plasma*. Zhurnal Vychislitel noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki, 20:682, 1980. 38
- [47] C.F.F. Karney and N.J. Fisch. *Current in wave driven plasmas*. Phys.Fluids, 29:180, 1986. 38
- [48] A.G.Zhidkov. *Simulation of the electron runaway in a plasma by Langevin equation*. Physics of Plasmas, 5:385, 1998. 38
- [49] G.N.Milshtein. *A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations*. Theory of Probability & Its Applications, 23(2):396, 1979. 43

- [50] N.J.Fisch. *Rev. Mod. Phys.*, 59:1775, 1987. 48
- [51] N.J.Fisch and C.F.F.Karney. *Conversion of wave energy to magnetic field energy in a plasma torus*. *Phys. Rev. Lett.*, 54:897, 1985. 48
- [52] V.Fuchs et al. *Velocity-space structure of runaway electrons*. *Physics of Fluids*, 29:2931, 1986. 50, 66, 71
- [53] Z.G.An et al. *Wave enhancement of electron runaway rate in a collisional plasma*. *Physics of Fluids*, 25:997, 1982. 58
- [54] G.Fussmann. *On the motion of runaway electrons in momentum space*. *Nuclear Fusion*, 19(3):327, 1979. 66
- [55] D.Mosher. *Interactions of relativistic electron beams with high atomic-number plasmas*. *Physics of Fluids*, 18:846, 1975. 66
- [56] J.D.Jackson and R.F.Fox. *Classical electrodynamics*. 1999. 67, 75, 76
- [57] J.Schwinger. *On the classical radiation of accelerated electrons*. *Physical Review*, 75(12):1912, 1949. 67
- [58] B.Kurzan et al. *Dynamics of runaway electrons in the magnetic field of a tokamak*. *Physical review letters*, 75(25):4626, 1995. 68
- [59] J.R.Martin-Solis et al. *Experimental Observation of Increased Threshold Electric Field for Runaway Generation due to Synchrotron Radiation Losses in the FTU Tokamak*. *Physical review letters*, 105(18):185002, 2010. 72, 77
- [60] G.Pautasso et al. *Disruption studies in ASDEX Upgrade in view of ITER*. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 51(12):124056, 2009. 75
- [61] M.Bakhtiari et al. *Role of bremsstrahlung radiation in limiting the energy of runaway electrons in tokamaks*. *Physical review letters*, 94(21):215003, 2005. 75
- [62] M.Bakhtiari et al. *Momentum-space study of the effect of bremsstrahlung radiation on the energy of runaway electrons in tokamaks*. *Physics of plasmas*, 12:102503, 2005. 75, 78
- [63] P.B.Parks et al. *Avalanche runaway growth rate from a momentum-space orbit analysis*. *Physics of Plasmas*, 6:2523, 1999. 77
- [64] I.Fernandez-Gomez et al. *Determination of the parametric region in which runaway electron energy losses are dominated by bremsstrahlung radiation in tokamaks*. *Physics of plasmas*, 14:072503, 2007. 78
- [65] J.A.Wesson et al. *Disruptions in JET*. *Nuclear Fusion*, 29(4):641, 1989. 87
- [66] A.J.Russo and R.B.Campbell. *A model for disruption generated runaway electrons*. *Nuclear Fusion*, 33(9):1305, 1993. 88

# Publicaciones

Los resultados de las investigaciones desarrolladas en esta tesis se han presentado en las siguientes publicaciones en revistas internacionales y contribuciones a congresos:

- *"Determination of the parametric region in which runaway electron energy losses are dominated by bremsstrahlung radiation in tokamaks"*  
I. Fernández-Gómez, J.R. Martín-Solís and R. Sánchez, Physics of Plasmas **14**, 072503 (2007).
- *"Operational space for bremsstrahlung radiation dominated energy of runaway electrons in tokamak plasmas"*  
I. Fernández-Gómez, J.R. Martín-Solís and R. Sánchez, 34<sup>th</sup> EPS Conference on Plasma Physics Warsaw, ECA Vol.**31F**, P5.127 (2007).
- *"Perpendicular dynamics of runaway electrons in tokamak plasmas"*  
I. Fernández-Gómez, J.R. Martín-Solís and R. Sánchez, 38<sup>th</sup> EPS Conference on Plasma Physics Strasbourg, ECA Vol.**35G**, P1.004 (2011).
- *"Perpendicular dynamics of runaway electrons in tokamak plasmas"*  
I. Fernández-Gómez, J.R. Martín-Solís and R. Sánchez, Physics of Plasmas **19**, 102504 (2012).

Durante la realización de esta tesis se ha colaborado también en el siguiente trabajo relacionado con la dinámica de electrones runaway en plasmas tokamak:

- *"Runaway electron dynamics in high atomic number plasmas"*  
J.R. Martín-Solís, I. Fernández-Gómez and R. Sánchez, 37<sup>th</sup> EPS Conference on Plasma Physics Dublin, ECA Vol.**34A**, P4.141 (2010).